Solución de Práctica de Prueba 1 de AE NM Set 2

Sección A

1. (a) $12+f+10+16+24=80$ (M1) por ecuación

$f=18$ A1

[2]

(b) (i) La mediana

$=\frac{3+4}{2}$ (M1) por enfoque válido

$=3,5$ A1

(ii) 5 A1

(iii) El rango intercuartil

$=\frac{5+5}{2}-\frac{2+2}{2}$ (M1) por enfoque válido

$=3$ A1

[5]

2. (a) (i) 7 A1

(ii) 1 A1

[2]

(b) $(f\circ g)(x)$

$=(g(x))^2$ (A1) por sustitución

$=(3-4x)^2$

$=9-24x+16x^2$ A1

[2]

(c) $y=3-4x$

$\Rightarrow x=3-4y$ (A1) por enfoque correcto

$4y=3-x$

$y=\frac{3-x}{4}$

$\therefore g^{-1}(x)=\frac{3-x}{4}$ A1

[2]

3. (a) $g'(x) = 4\cos 2x$

$g(x) = \int 4\cos 2x \mathrm{d}x$ (M1) por integral indefinida

$\boxed{\begin{array}{l} \text{Sea } u = 2x \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x \end{array}}$ (A1) por sustitución

$g(x) = \int 2\cos u \mathrm{d}u$

$g(x) = 2\operatorname{sen} u + C$ A1

$g(x) = 2\operatorname{sen} 2x + C$

$\therefore 7 = 2\operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{4}\right) + C$ (M1) por sustitución

$7 = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + C$

$7 = 2 + C$

$C = 5$

$\therefore g(x) = 2\operatorname{sen} 2x + 5$ A1

[5]

(b) 5 A1

[1]

4. (a) Lado derecho

$$=\frac{1\times 49}{1\times 49}+\frac{2\times 7}{7\times 7}+\frac{5}{49}$$ M1

$$=\frac{49+14+5}{49}$$ A1

$$=\frac{68}{49}$$

$=$Lado izquierdo

$$\therefore \frac{68}{49}=1+\frac{2}{7}+\frac{5}{49}$$ AG

[2]

(b) Lado derecho

$$=\frac{1\times (m+2)^2}{1\times (m+2)^2}+\frac{2\times (m+2)}{(m+2)\times (m+2)}+\frac{5}{(m+2)^2}$$ M1

$$=\frac{(m^2+4m+4)+(2m+4)+5}{(m+2)^2}$$ M1A1

$$=\frac{m^2+6m+9+4}{(m+2)^2}$$

$$=\frac{(m+3)^2+4}{(m+2)^2}$$

$=$Lado izquierdo

$$\therefore \frac{(m+3)^2+4}{(m+2)^2}\equiv 1+\frac{2}{m+2}+\frac{5}{(m+2)^2}$$ para $m\neq -2$ AG

[3]

5. $9\log_{27}(x+1)=1+\log_3(3+x+x^2)$

$$\frac{9\log_3(x+1)}{\log_3 27}=\log_3 3+\log_3(3+x+x^2)$$ (M1)(A1) por cambio de base

$$\frac{9\log_3(x+1)}{3}=\log_3 3(3+x+x^2)$$ (A1) por enfoque correcto

$3\log_3(x+1)=\log_3 3(3+x+x^2)$

$\log_3(x+1)^3=\log_3 3(3+x+x^2)$ A1

$\therefore (x+1)^3=3(3+x+x^2)$ M1

$x^3+3x^2+3x+1=9+3x+3x^2$

$x^3=8$ A1

$x=\sqrt[3]{8}$

$x=2$ A1

[7]

6. (a) El discriminante de $f(x)$

$= b^2 - 4ac$

$= (8-p)^2 - 4\left(1+2p-\frac{3}{8}p^2\right)(-2)$ M1A1

$= 64 - 16p + p^2 + 8 + 16p - 3p^2$ A1

$= 72 - 2p^2$ AG

[3]

(b) $f(x) = 0$ tiene dos raíces iguales

$\therefore 72 - 2p^2 = 0$ (M1) por ecuación

$2p^2 = 72$

$p^2 = 36$

$p = -6$ o $p = 6$ A2

[3]

(c) $p = 6$

$\therefore \left(1+2(6)-\frac{3}{8}(6)^2\right)x^2 + (8-6)x - 2 = 0$ (M1) por ecuación

$-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 = 0$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$(x-2)^2 = 0$

$x = 2$ A1

[2]

Sección B

7. (a) $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x$

$f(x) = \int\left(-\frac{1}{2}x^2 + 5x\right)\mathrm{d}x$ (M1) por integral indefinida

$f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^3\right) + 5\left(\frac{1}{2}x^2\right) + C$ A1

$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + C$

$\therefore -\frac{26}{3} = -\frac{1}{6}(0)^3 + \frac{5}{2}(0)^2 + C$ (M1) por sustitución

$C = -\frac{26}{3}$

$\therefore f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{26}{3}$ A1

$f(2) = -\frac{1}{6}(2)^3 + \frac{5}{2}(2)^2 - \frac{26}{3}$ (M1) por sustitución

$f(2) = -\frac{4}{3} + 10 - \frac{26}{3}$

$f(2) = 0$ A1

[6]

(b) $f''(x) = -\frac{1}{2}(2x) + 5(1)$ (A1) por derivadas correctas

$f''(x) = -x + 5$

$f''(x) = 0$

$\therefore -x + 5 = 0$ (M1) por ecuación

$x = 5$ A1

$f(5) = -\frac{1}{6}(5)^3 + \frac{5}{2}(5)^2 - \frac{26}{3}$ (M1) por sustitución

$f(5) = -\frac{125}{6} + \frac{375}{6} - \frac{52}{6}$

$f(5) = 33$

Por lo tanto, las coordenadas de P son $(5, 33)$. A1

[5]

(c) La gráfica de f es cóncava hacia arriba

$\therefore f''(x) > 0$ (A1) por inecuación correcta

$-x + 5 > 0$

$x < 5$ A1

[2]

8.	(a)	$2r + h = 20$	(A1) por enfoque correcto
		$2r = 20 - h$	
		$r = 10 - \frac{1}{2}h$	A1
			[2]
	(b)	$V = \pi r^2 h$	
		$V = \pi\left(10 - \frac{1}{2}h\right)^2 h$	(A1) por sustitución
		$V = 100\pi h - 10\pi h^2 + \frac{1}{4}\pi h^3$	A1
			[2]
	(c)	$Q = (3)(2\pi rh) + (4)(\pi r^2)$	M1A1
		$Q = 6\pi\left(10 - \frac{1}{2}h\right)h + 4\pi\left(10 - \frac{1}{2}h\right)^2$	M1
		$Q = 60\pi h - 3\pi h^2 + 400\pi - 40\pi h + \pi h^2$	A1
		$Q = 400\pi + 20\pi h - 2\pi h^2$	
		$Q = 2\pi(200 + 10h - h^2)$	AG
			[4]
	(d)	$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}h} = 2\pi(0 + 10(1) - 2h)$	(A1) por derivadas correctas
		$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}h} = 4\pi(5 - h)$	A1
		$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}h} = 0$	(M1) por ecuación
		$\therefore 4\pi(5 - h) = 0$	A1
		$h = 5$	A1
		El valor máximo de Q	
		$= 2\pi(200 + 10(5) - (5)^2)$	(M1) por sustitución
		$= 450\pi$	A1
			[7]

9. (a) $r=\dfrac{20\cos^4\alpha}{30\cos^2\alpha}$ (M1) por enfoque válido

$r=\dfrac{2}{3}\cos^2\alpha$ A1

[2]

(b) $\pi\le\alpha\le\dfrac{4}{3}\pi$

$\therefore\cos\pi\le\cos\alpha\le\cos\dfrac{4}{3}\pi$ (M1) por enfoque válido

$-1\le\cos\alpha\le-\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{4}\le\cos^2\alpha\le1$

$\dfrac{1}{6}\le\dfrac{2}{3}\cos^2\alpha\le\dfrac{2}{3}$

$\therefore\dfrac{1}{6}\le r\le\dfrac{2}{3}$ A1

[2]

(c) $S_\infty=\dfrac{30\cos^2\alpha}{1-\dfrac{2}{3}\cos^2\alpha}$ A1

$S_\infty=\dfrac{30\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha-\dfrac{2}{3}\cos^2\alpha}$ M1

$S_\infty=\dfrac{30\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha+\dfrac{1}{3}\cos^2\alpha}$ A1

$S_\infty=\dfrac{30}{\tan^2\alpha+\dfrac{1}{3}}$ A1

$S_\infty=\dfrac{90}{3\tan^2\alpha+1}$ AG

[4]

(d) $\pi \le \alpha \le \frac{4}{3}\pi$

$\therefore \tan\pi \le \tan\alpha \le \tan\frac{4}{3}\pi$ M1

$0 \le \tan\alpha \le \sqrt{3}$

$0 \le \tan^2\alpha \le 3$ A1

$0 \le 3\tan^2\alpha \le 9$

$1 \le 3\tan^2\alpha + 1 \le 10$

$\therefore \frac{1}{10} \le \frac{1}{3\tan^2\alpha + 1} \le 1$ A1

$9 \le S_\infty \le 90$ A1

Cuando $\alpha = \frac{4}{3}\pi$,

$S_\infty = \dfrac{90}{3\tan^2\left(\frac{4}{3}\pi\right) + 1}$ M1

$S_\infty = 9$

Por lo tanto, S_∞ alcanza su mínimo en

$\alpha = \frac{4}{3}\pi$. AG

[5]