Solución de Práctica de Prueba 2 de AE NS Set 2

Sección A

1.

$$\left(kx-\frac{4}{x}\right)^8=(kx)^8+\binom{8}{1}(kx)^7\left(-\frac{4}{x}\right)+\binom{8}{2}(kx)^6\left(-\frac{4}{x}\right)^2$$
$$+\binom{8}{3}(kx)^5\left(-\frac{4}{x}\right)^3+\binom{8}{4}(kx)^4\left(-\frac{4}{x}\right)^4+\ldots$$

(M1)(A1) por enfoque correcto

$$\left(kx-\frac{4}{x}\right)^8=k^8x^8+8k^7x^7\left(-\frac{4}{x}\right)+28k^6x^6\left(\frac{16}{x^2}\right)$$
$$+56k^5x^5\left(-\frac{64}{x^3}\right)+70k^4x^4\left(\frac{256}{x^4}\right)+\ldots$$

(A1) por simplificación

$$\left(kx-\frac{4}{x}\right)^8=k^8x^8-32k^7x^6+448k^6x^4$$
$$-3584k^5x^2+17920k^4+\ldots$$

A1

$$\therefore 448k^6:17920k^4=9:40$$

A1

$$\frac{448k^6}{17920k^4}=\frac{9}{40}$$

$$\frac{k^2}{40}=\frac{9}{40}$$

$k=-3$ o $k=3$ (*Rechazada*)

A1

[6]

2. (a) $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh + 2\pi r^2$ (M2) por ecuación

$135\pi = 4\pi r^2 + 2\pi r(3,5)$ (A1) por sustitución

$135 = 4r^2 + 7r$

$4r^2 + 7r - 135 = 0$ (M1) por ecuación cuadrática

$(4r + 27)(r - 5) = 0$

$4r + 27 = 0$ o $r - 5 = 0$

$r = -\dfrac{27}{4}$ (*Rechazada*) o $r = 5\text{ mm}$ A1

[5]

(b) El volumen

$= \dfrac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$ (M1) por enfoque válido

$= \dfrac{4}{3}\pi(5)^3 + \pi(5)^2(3,5)$

$= 798,4881328\text{ mm}^3$

$= 798\text{ mm}^3$ A1

[2]

3. (a) (i) $\cos \hat{ABC} = \dfrac{r^2 + (1,75r)^2 - (1,5r)^2}{2(r)(1,75r)}$ M1A1

$\cos \hat{ABC} = \dfrac{1,8125r^2}{3,5r^2}$ A1

$\cos \hat{ABC} = \dfrac{29}{56}$ AG

(ii) $\hat{ABC} = 1,026452178\text{ rad}$

$\hat{ABC} = 1,03\text{ rad}$ A1

[4]

(b) $\dfrac{1}{2}(BC)^2(\hat{ABC}) = 9,89$ (M1) por ecuación

$\dfrac{1}{2}r^2(\pi - 1,026452178) = 9,89$ (A1) por sustitución

$r^2 = 9,35162474$

$r = 3,058042632$

$r = 3,06$ A1

[3]

4. $X \sim \mathrm{B}\left(5, \dfrac{2p}{p+2p+10}\right)$ (R1) por distribución correcta

La desviación típica de X

$= \sqrt{5\left(\dfrac{2p}{3p+10}\right)\left(1-\dfrac{2p}{3p+10}\right)}$ (A1) por sustitución

$= \sqrt{5\left(\dfrac{2p}{3p+10}\right)\left(\dfrac{p+10}{3p+10}\right)}$

$\therefore \sqrt{5\left(\dfrac{2p}{3p+10}\right)\left(\dfrac{p+10}{3p+10}\right)} > \dfrac{11}{10}$ (M1) por enfoque válido

$5\left(\dfrac{2p}{3p+10}\right)\left(\dfrac{p+10}{3p+10}\right) > \dfrac{121}{100}$ M1

$5\left(\dfrac{2p}{3p+10}\right)\left(\dfrac{p+10}{3p+10}\right) - \dfrac{121}{100} > 0$ A1

Considerando el gráfico de

$y = 5\left(\dfrac{2p}{3p+10}\right)\left(\dfrac{p+10}{3p+10}\right) - \dfrac{121}{100}$,

$5,3435147 < p < 25,443002$.

Por lo tanto, el mayor valor de p es 25. A1

[6]

5. $v = \int (8-8t)\mathrm{d}t$ (M1) por integral indefinida

$v = 8t - 8\left(\dfrac{1}{2}t^2\right) + C$ A1

$v = 8t - 4t^2 + C$

La velocidad inicial

$= 8(0) - 4(0)^2 + C$ (M1) por enfoque válido

$= C$

La diferencia entre las velocidades es de $4\ \mathrm{ms}^{-1}$

$\therefore 8t - 4t^2 + C = C + 4$ o $\therefore 8t - 4t^2 + C = C - 4$ (A1) por enfoque correcto

$4t^2 - 8t + 4 = 0$ o $4t^2 - 8t - 4 = 0$ A2

$4(t-1)^2 = 0$ o $t = \dfrac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(4)(-4)}}{2(4)}$

$t = 1$ o $t = 2,414213562$,

$t = -0,4142135624$ (*Rechazada*)

$\therefore m = 1$ o $m = 2,41$ A2

[8]

6. (a) Por utilizar operaciones con las filas, el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 1 & -4 & -6 & -17 \\ 3 & 1 & 2 & 21 \end{array}\right) \text{ se reduce a}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$ (M1) por enfoque válido

Por lo tanto, las coordenadas de P son $(5, 4, 1)$. A3

[4]

(b) $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ A2

[2]

7. (a) $\{x : -5 \le x \le 1\}$ A2

[2]

(b) $f(x) = 2-(x-1)^2$

$y = 2-(x-1)^2$

$\Rightarrow x = 2-(y-1)^2$ (M1) for intercambiar variables

$(y-1)^2 = 2-x$

$y-1 = \sqrt{2-x}$ (*Rechazada*) o $y-1 = -\sqrt{2-x}$ A1

$y = -\sqrt{2-x}+1$

$\therefore f^{-1}(x) = -\sqrt{2-x}+1$ A1

[3]

(c) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \dfrac{x}{3}$

$f^{-1}(x) = g\left(\dfrac{x}{3}\right)$ M1

$g\left(\dfrac{x}{3}\right) = -\sqrt{2-x}+1$

$g\left(3\left(\dfrac{x}{3}\right)\right) = -\sqrt{2-3x}+1$ A1

$\therefore g(x) = -\sqrt{2-3x}+1$ A1

[3]

8. $\frac{2\pi}{B} = 2(4-0)$

$\frac{2\pi}{B} = 8$

$B = \frac{\pi}{4}$ A1

$5+\pi = A\sec\frac{\pi}{4}(0)+C$

$5+\pi = A+C$

$C = 5+\pi - A$

$5-\pi = A\sec\frac{\pi}{4}(4)+C$

$\therefore 5-\pi = A(-1)+5+\pi - A$ (M1) por sustitución

$-2\pi = -2A$

$A = \pi$ A1

$C = 5+\pi-\pi$

$C = 5$ A1

[4]

9. (a) El número total de maneras posibles es

$= \frac{14!}{14\times 2}$ (A2) por fórmula correcta

$= 3113510400$ A1

[3]

(b) El número de maneras posibles es

$= 3113510400 - \frac{2!\times 13!}{13\times 2}$ (A2) por fórmula correcta

$= 2634508800$ A1

[3]

Sección B

10. (a) $\mathrm{P}(L > 59,2) = 0,12$ — (M1) por enfoque válido

$\mathrm{P}\left(Z > \frac{59,2-\mu}{3,5}\right) = 0,12$ — (A1) por enfoque correcto

$\frac{59,2-\mu}{3,5} = 1,174986791$ — A1

$59,2-\mu = 4,11245377$

$\mu = 55,08754623$

$\mu = 55,1$ — A1

[4]

(b) $\mathrm{P}(L < q) = 0,55$

$\mathrm{P}\left(Z < \frac{q-55,08754623}{3,5}\right) = 0,55$ — (A1) por enfoque correcto

$\frac{q-55,08754623}{3,5} = 0,1256613375$

$q-55,08754623 = 0,4398146813$

$q = 55,52736091$ — A1

$\therefore q = 55,5$ — A1

[3]

(c) (i) $X \sim \mathrm{B}(10; 0,55)$ — (R1) por distribución correcta

$\mathrm{E}(X) = (10)(0,55)$ — (A1) por sustitución

$\mathrm{E}(X) = 5,5$ — A1

(ii) $\mathrm{P}(X > 5) = 1 - \mathrm{P}(X \le 5)$ — (M1) por enfoque válido

$\mathrm{P}(X > 5) = 1 - 0,4955954083$ — A1

$\mathrm{P}(X > 5) = 0,5044045917$

$\mathrm{P}(X > 5) = 0,504$ — A1

[6]

(d) $m\left(\frac{55\%}{55\%+33\%}\right)(0,8) + m\left(\frac{33\%}{55\%+33\%}\right)(1,1)$ — (M1)(A1) por enfoque correcto

$= (949)(1000)$

$0,5m + 0,4125m = 949000$ — A1

$0,9125m = 949000$

$m = 1040000$ — A1

[4]

11. (a) Cuando $0 \le t \le 1$,

$s(t) = \int \pi t \mathrm{d}t$ (M1) por enfoque válido

$s(t) = \frac{\pi}{2}t^2 + C$ (A1) por valor correcto

$s(0) = -\frac{\pi}{2}$

$\therefore \frac{\pi}{2}(0)^2 + C = -\frac{\pi}{2}$

$C = -\frac{\pi}{2}$

$s(1) = \frac{\pi}{2}(1)^2 - \frac{\pi}{2}$

$s(1) = 0$ (A1) por valor correcto

Cuando $1 < t \le 5$,

$s(t) = \int \pi e^{1-t} \mathrm{d}t$ (M1) por enfoque válido

$s(t) = -\pi e^{1-t} + D$ (A1) por valor correcto

$s(1) = 0$

$\therefore -\pi e^{1-1} + D = 0$

$D = \pi$ (A1) por valor correcto

$s(5) = -\pi e^{1-5} + \pi$

$s(5) = -\pi e^{-4} + \pi$

$s(5) = \frac{\pi}{e^4}(e^4 - 1)$ (A1) por valor correcto

$$\therefore s(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}t^2 - \frac{\pi}{2} & 0 \le t \le 1 \\ -\pi e^{1-t} + \pi & 1 < t \le 5 \\ \frac{\pi}{e^4}(e^4 - 1) & t > 5 \end{cases}$$ A1

[8]

(b) $a(t)=\begin{cases}\pi(1) & 0\le t\le 1\\ \pi e^{1-t}(-1) & 1<t\le 5\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$ (M1) por enfoque válido

$a(t)=\begin{cases}\pi & 0\le t\le 1\\ -\pi e^{1-t} & 1<t\le 5\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$ (A1) por valores correctos

$a(t)<-3$

$-\pi e^{1-t}<-3$ (M1) por inecuación

$3-\pi e^{1-t}<0$

Considerando el gráfico de $y=3-\pi e^{1-t}$,

$t<1,0461176$.

$\therefore 1<t<1,05$ A1

[4]

(c) (i) $\dfrac{ds}{dt}=\pi e^{1-t}$

$\dfrac{dv}{dt}=-\pi e^{1-t}$

$\therefore \dfrac{ds}{dv}$

$=\dfrac{ds}{dt}\div\dfrac{dv}{dt}$ M1

$=\dfrac{\pi e^{1-t}}{-\pi e^{1-t}}$ A1

$=-1$ AG

(ii) $\dfrac{dt}{dv}$

$=1\div\dfrac{dv}{dt}$ M1

$=\dfrac{1}{-\pi e^{1-t}}$ A1

$=-\dfrac{1}{\pi}e^{t-1}$ AG

[4]

12. (a) $|z|$

$$=\left|\frac{\frac{4}{5}e^{i\theta}}{2}\right|$$ (A1) por enfoque correcto

$$=\left|\frac{2}{5}e^{i\theta}\right|$$

$$=\frac{2}{5}\left|e^{i\theta}\right|$$

$$=\frac{2}{5}(1)$$

$$=\frac{2}{5}$$ A1

[2]

(b) $$\frac{2}{1-\frac{2}{5}e^{i\theta}}$$ A2

[2]

(c) (i) $$\frac{2}{1-\frac{2}{5}e^{i\theta}}$$

$$=\frac{10}{5-2e^{i\theta}}$$

$$=\frac{10(5-2e^{i(-\theta)})}{(5-2e^{i\theta})(5-2e^{i(-\theta)})}$$ M1A1

$$=\frac{50-20e^{i(-\theta)}}{25-10e^{i(-\theta)}-10e^{i\theta}+4}$$ M1

$$=\frac{50-20e^{i(-\theta)}}{29-10(e^{i(-\theta)}+e^{i\theta})}$$

$$=\frac{50-20(\cos(-\theta)+i\,\mathrm{sen}\,(-\theta))}{29-10(\cos(-\theta)+i\,\mathrm{sen}\,(-\theta)+\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)}$$ A1

$$=\frac{50-20(\cos\theta-i\,\mathrm{sen}\,\theta)}{29-10(\cos\theta-i\,\mathrm{sen}\,\theta+\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)}$$

$$=\frac{50-20\cos\theta+20i\,\mathrm{sen}\,\theta}{29-10(2\cos\theta)}$$ M1

$$=\frac{(50-20\cos\theta)+i(20\,\mathrm{sen}\,\theta)}{29-20\cos\theta}$$ A1

$$\frac{4}{5}\operatorname{sen}\theta+\frac{8}{25}\operatorname{sen}2\theta+\frac{16}{125}\operatorname{sen}3\theta+\cdots$$
$$=\frac{20\operatorname{sen}\theta}{29-20\cos\theta}$$ M1A1

$$\therefore \operatorname{sen}\theta+\frac{2}{5}\operatorname{sen}2\theta+\frac{4}{25}\operatorname{sen}3\theta+\cdots$$
$$=\frac{25\operatorname{sen}\theta}{29-20\cos\theta}$$ AG

(ii) $$2+\frac{4}{5}\cos\theta+\frac{8}{25}\cos 2\theta+\cdots=\frac{50-20\cos\theta}{29-20\cos\theta}$$ M1A1

$$\frac{4}{5}\cos\theta+\frac{8}{25}\cos 2\theta+\frac{16}{125}\cos 3\theta+\cdots$$
$$=\frac{50-20\cos\theta}{29-20\cos\theta}-2$$ M1

$$=\frac{50-20\cos\theta}{29-20\cos\theta}-\frac{2(29-20\cos\theta)}{29-20\cos\theta}$$

$$=\frac{50-20\cos\theta}{29-20\cos\theta}-\frac{58-40\cos\theta}{29-20\cos\theta}$$ A1

$$=\frac{50-20\cos\theta-58+40\cos\theta}{29-20\cos\theta}$$ M1

$$=\frac{-8+20\cos\theta}{29-20\cos\theta}$$ A1

$$\therefore \cos\theta+\frac{2}{5}\cos 2\theta+\frac{4}{25}\cos 3\theta+\cdots$$
$$=\frac{-10+25\cos\theta}{29-20\cos\theta}$$ A1

$$=\frac{5(-2+5\cos\theta)}{29-20\cos\theta}$$ AG

[15]