Solución de Práctica de Prueba 2 de AE NS Set 4

Sección A

1.	(a)	(i)	$(3,-127)$	A2
		(ii)	$f(x)=3(x-3)^2-127$	A2
				[4]
	(b)	$3x^2-18x-100=-52$		
		$3x^2-18x-48=0$		(A1) por ecuación correcta
		$3(x+2)(x-8)=0$		
		$x=-2$ o $x=8$		A2
				[3]
2.	(a)	p es negativo ya que el primer punto crítico es un mínimo.		R1
		$p=-\dfrac{4,3}{2}$		A1
		$p=-2,15$		AG
				[2]
	(c)	(i)	El período	
			$=13,75-2,75$	(M1) por enfoque válido
			$=11$ horas	(A1) por valor correcto
			$\therefore q=\dfrac{2\pi}{11}$	A1
		(ii)	$r=\dfrac{(1,9+4,3)+1,9}{2}$	(M1) por enfoque válido
			$r=4,05$	A1
				[5]

3. (a) $\mathrm{B\hat{A}C}$

$= \pi - 0{,}88 - 1{,}23$ (M1) por enfoque válido

$= 1{,}031592654$ A1

$$\frac{\mathrm{AB}}{\operatorname{sen} \mathrm{A\hat{C}B}} = \frac{\mathrm{BC}}{\operatorname{sen} \mathrm{B\hat{A}C}}$$ (M1) por regla del seno

$$\frac{\mathrm{AB}}{\operatorname{sen} 1{,}23} = \frac{20}{\operatorname{sen} 1{,}031592654}$$ (A1) por sustitución

$\mathrm{AB} = 21{,}96641928\ \mathrm{cm}$

$\mathrm{AB} = 22{,}0\ \mathrm{cm}$ A1

[5]

(b) $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2(\mathrm{OA})(\mathrm{OB}) \cos \mathrm{A\hat{O}B}$ M1

$\mathrm{AB}^2 = r^2 + r^2 - 2(r)(r) \cos \mathrm{A\hat{O}B}$ A1

$\mathrm{AB}^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos \mathrm{A\hat{O}B}$

$\mathrm{AB}^2 = 2r^2 (1 - \cos \mathrm{A\hat{O}B})$ A1

$$r^2 = \frac{\mathrm{AB}^2}{2(1 - \cos \mathrm{A\hat{O}B})}$$ AG

[3]

4. (a) La razón común r

$$= \frac{3k^2 - 4k^3}{k^2}$$ (M1) por enfoque válido

$= 3 - 4k$ A1

[2]

(b) S_∞ existe si $-1 < r < 1$. R1

$\therefore -1 < 3 - 4k < 1$ M1

$-1 < 4k - 3 < 1$

$2 < 4k < 4$ A1

$$\frac{1}{2} < k < 1$$ AG

[3]

5. El término general

$$=\binom{9}{r}\left(\frac{x}{h^2}\right)^{9-r}\left(-\frac{h}{x^2}\right)^r$$ (M1) por expansión válida

$$=\binom{9}{r}(-1)^r h^{3r-18}x^{9-3r}$$

$9-3r=0$ (A1) por ecuación correcta

$3r=9$

$r=3$ (A1) por valor correcto

El término requerido

$$=\binom{9}{3}(-1)^3 h^{3(3)-18}x^{9-3(3)}$$

$$=-\frac{84}{h^9}$$ (A1) por término correcto

$$-\frac{84}{h^9}=-\frac{21}{65536}$$ (M1) por ecuación

$h^9=262144$

$h=4$ A1

[6]

6. (a) Sea $\frac{x^2+9}{(4-x)(5-2x)} \equiv A+\frac{B}{4-x}+\frac{C}{5-2x}$, donde A, B y C son constantes.

$$\frac{x^2+9}{(4-x)(5-2x)} \equiv \frac{A(4-x)(5-2x)}{(4-x)(5-2x)} + \frac{B(5-2x)}{(4-x)(5-2x)} + \frac{C(4-x)}{(4-x)(5-2x)}$$ M1

$$\frac{x^2+9}{(4-x)(5-2x)} \equiv \frac{20A-13Ax+2Ax^2+5B-2Bx+4C-Cx}{(4-x)(5-2x)}$$

$x^2+9 \equiv 2Ax^2+(-13A-2B-C)x+(20A+5B+4C)$ A1

$2A=1$

$A=\frac{1}{2}$ A1

$0=-13\left(\frac{1}{2}\right)-2B-C$

$C=-\frac{13}{2}-2B$

$9=20A+5B+4C$

$\therefore 9=20\left(\frac{1}{2}\right)+5B+4\left(-\frac{13}{2}-2B\right)$ A1

$9=10+5B-26-8B$

$25=-3B$

$B=-\frac{25}{3}$ A1

$\therefore C=-\frac{13}{2}-2\left(-\frac{25}{3}\right)$

$C=\frac{61}{6}$ A1

[6]

(b) $g(x)=-\frac{(4-x)(5-2x)}{x^2+9}$

El discriminante de x^2+9

$=0^2-4(1)(9)$ A1

$=-36<0$

Por lo tanto, el denominador es siempre distinto de cero.

Por tanto, $g(x)$ no tiene asíntota vertical. AG

[1]

7. (a) $\left\{x : -5 \le x \le \frac{2}{3}\right\}$ A2

[2]

(b) $f(x) = (3x-2)^2$

$y = (3x-2)^2$

$\Rightarrow x = (3y-2)^2$ (M1) por intercambiar variables

$-\sqrt{x} = 3y - 2$

$-\sqrt{x} + 2 = 3y$

$y = \dfrac{-\sqrt{x}+2}{3}$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{-\sqrt{x}+2}{3}$ A1

[2]

(c) $(f \circ g)(x) = x^4$

$g(x) = f^{-1}(x^4)$ M1

$g(x) = \dfrac{-\sqrt{x^4}+2}{3}$

$g(x) = \dfrac{-x^2+2}{3}$ A1

[2]

8. $\binom{12}{2} \times \binom{10}{r} \times \binom{10-r}{10-r} = 7920$ M1A1

$\binom{10}{r} = 120$ (A1) por simplificación

$\binom{10}{r} = \binom{10}{3}$ or $\binom{10}{r} = \binom{10}{7}$

$r = 3$ o $r = 7$ A2

[5]

9. (a) La desviación típica de X

$= \sqrt{\mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2}$ (M1) por enfoque válido

$= \sqrt{\begin{array}{l}\int_{-4}^{0} x^2 \cdot \left(\frac{1}{20}x + \frac{1}{5}\right) \mathrm{d}x \\ +\int_{0}^{3} x^2 \cdot \left(-\frac{1}{15}x^2 + \frac{2}{15}x + \frac{1}{5}\right) \mathrm{d}x - \left(\frac{13}{60}\right)^2\end{array}}$ A1

$= \sqrt{2,279722222}$

$= 1,509874903$

$= 1,51$ A1

[3]

(b) $\mathrm{P}(|X| > 2)$

$= \mathrm{P}(X > 2 \text{ o } X < -2)$ (M1) por enfoque válido

$= \mathrm{P}(X < -2) + \mathrm{P}(X > 2)$

$= \int_{-4}^{-2} \left(\frac{1}{20}x + \frac{1}{5}\right) \mathrm{d}x + \int_{2}^{3} \left(-\frac{1}{15}x^2 + \frac{2}{15}x + \frac{1}{5}\right) \mathrm{d}x$ A1

$= \frac{19}{90}$ A1

[3]

Sección B

10. (a) (i) $a_1(t) = \dfrac{20-30}{2-0}$ M1A1

$a_1(t) = -5$ AG

(ii) $v_1(t) = -5t + 30$ A2

[4]

(b) La distancia total recorrida por la canica

$= \int_0^2 |v_1(t)|\,\mathrm{d}t$ (M1) por enfoque válido

$= \int_0^2 |-5t+30|\,\mathrm{d}t$ (A1) por fórmula correcta

$= 50 \text{ cm}$ A1

[3]

(c) (i) $v_2(2) = 20$

$\therefore 20e^{b-0,2(2)} = 20$ M1

$e^{b-0,4} = 1$

$b - 0,4 = 0$ A1

$b = 0,4$ AG

(ii) $\int_2^c |v_2(t)|\,\mathrm{d}t = 50$

$\int_2^c 20e^{0,4-0,2t}\,\mathrm{d}t = 50$ (M1) por ecuación

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Sea } u = 0,4-0,2t \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -0,2 \Rightarrow -100\mathrm{d}u = 20\mathrm{d}t \\ t = c \Rightarrow u = 0,4-0,2c \\ t = 2 \Rightarrow u = 0,4-0,2(2) = 0 \end{array}}$$

(A1) por sustitución

$\int_0^{0,4-0,2c} -100e^u\,\mathrm{d}u = 50$ A1

$\left[-100e^u\right]_0^{0,4-0,2c} = 50$

$e^{0,4-0,2c} - e^0 = -0,5$ (M1) por sustitución

$e^{0,4-0,2c} = 0,5$

$0,4 - 0,2c = \ln 0,5$

$0,4 - \ln 0,5 = 0,2c$

$c = 5,465735903$

$c = 5,47$ A1

[7]

11. (a) Las coordenadas de A, B' y C son $(-3, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$ y $(0, 0, 8)$ respectivamente. A1

$\mathbf{n} = \overrightarrow{\mathrm{AB}'} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ M1

$\mathbf{n} = (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \times (3\mathbf{i} + 8\mathbf{k})$ A1

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} (4)(8) - (0)(0) \\ (0)(3) - (3)(8) \\ (3)(0) - (4)(3) \end{pmatrix}$$

$\mathbf{n} = 32\mathbf{i} - 24\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$ A1

La ecuación cartesiana del plano π_2:

$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot (32\mathbf{i} - 24\mathbf{j} - 12\mathbf{k})$

$= -3\mathbf{i} \cdot (32\mathbf{i} - 24\mathbf{j} - 12\mathbf{k})$ M1A1

$32x - 24y - 12z = (-3)(32) + (0)(-24) + (0)(-12)$

$32x - 24y - 12z = -96$

$8x - 6y - 3z = -24$ AG

[6]

(b) Las coordenadas de B son $(0, -4, 0)$. (A1) por valores correctos

El volumen de la pirámide ABCC'

$= \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{(\mathrm{BB}')(\mathrm{OA})}{2}\right)(\mathrm{OC})$ (M1) por enfoque válido

$= \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{(4-(-4))(0-(-3))}{2}\right)(8)$ A1

$= 32$ A1

[4]

(c) $\mathbf{n}_1 = 8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

$\mathbf{n}_2 = 8\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ (A1) por valores correctos

Sea θ el ángulo obtuso entre los planos.

$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = |\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|\cos\theta$ (M1) por enfoque válido

$(8)(8) + (6)(-6) + (-3)(-3)$

$= (\sqrt{8^2 + 6^2 + (-3)^2})(\sqrt{8^2 + (-6)^2 + (-3)^2})\cos\theta$ (A1) por sustitución

$37 = (\sqrt{109})(\sqrt{109})\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{37}{109}$ A1

$\theta = 70{,}15665929^\circ$

El ángulo obtuso requerido

$= 180^\circ - 70{,}15665929^\circ$

$= 109{,}8433407^\circ$

$= 110^\circ$ A1

[5]

(d) El punto medio de BC

$= \left(\frac{0+0}{2}, \frac{-4+0}{2}, \frac{0+8}{2}\right)$

$= (0, -2, 4)$ (A1) por valores correctos

$\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ (M1) por enfoque válido

$\mathbf{n}_3 = (8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \times (8\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$

$$\mathbf{n}_3 = \begin{pmatrix} (6)(-3) - (-3)(-6) \\ (-3)(8) - (8)(-3) \\ (8)(-6) - (6)(8) \end{pmatrix}$$

$\mathbf{n}_3 = -36\mathbf{i} - 96\mathbf{k}$ A1

La ecuación vectorial de la recta:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -36 \\ 0 \\ -96 \end{pmatrix}$$ A1

$$\begin{cases} x = -36t \\ y = -2 \\ z = 4 - 96t \end{cases}$$

$\frac{x}{-36} = \frac{z-4}{-96}, y = -2$ A1

[5]

12. (a) (i) $x^2\dfrac{dy}{dx}+6y=x^3e^{x^2+\frac{6}{x}}$

$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{6}{x^2}y=xe^{x^2+\frac{6}{x}}$ (A1) por enfoque correcto

El factor integrante

$=e^{\int\frac{6}{x^2}dx}$ (M1) por enfoque válido

$=e^{-\frac{6}{x}}$ A1

$\therefore e^{-\frac{6}{x}}\dfrac{dy}{dx}+e^{-\frac{6}{x}}\cdot\dfrac{6}{x^2}y=e^{-\frac{6}{x}}\cdot xe^{x^2+\frac{6}{x}}$ (M1) por enfoque válido

$e^{-\frac{6}{x}}\dfrac{dy}{dx}+e^{-\frac{6}{x}}\cdot\dfrac{6}{x^2}y=xe^{x^2}$

$\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-\frac{6}{x}}\right)=xe^{x^2}$ (A1) por enfoque correcto

$ye^{-\frac{6}{x}}=\int xe^{x^2}dx$

Sea $u=x^2$. (M1) por sustitución

$\dfrac{du}{dx}=2x\Rightarrow\dfrac{1}{2}du=xdx$

$\therefore ye^{-\frac{6}{x}}=\int e^u\cdot\dfrac{1}{2}du$ (A1) por enfoque correcto

$ye^{-\frac{6}{x}}=\dfrac{1}{2}\int e^u du$

$ye^{-\frac{6}{x}}=\dfrac{1}{2}e^u+C$

$ye^{-\frac{6}{x}}=\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C$ A1

$ye^{-\frac{6}{x}}=\dfrac{e^{x^2}+C}{2}$

$y=\dfrac{e^{\frac{6}{x}}(e^{x^2}+C)}{2}$ A1

$\dfrac{e^7}{2}=\dfrac{e^{\frac{6}{1}}(e^{1^2}+C)}{2}$ (M1) por sustitución

$\dfrac{e^7}{2}=\dfrac{e^7+Ce^6}{2}$

$Ce^6=0$

$C=0$

$$\therefore y = \frac{e^{\frac{6}{x}+x^2}}{2}$$ A1

(ii) $\frac{e^{11}}{2}$ A1

[12]

(b) (i) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 0{,}1 \\ y_{n+1} = y_n + 0{,}1 \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x_n,\, y_n)} \end{cases}$ M1

$x_0 = 1,\ y_0 = \frac{e^7}{2}$ A1

$x_1 = 1 + 0{,}1$

$x_1 = 1{,}1$

$y_1 = \frac{e^7}{2} + 0{,}1\left(1e^{1^2+\frac{6}{1}} - \frac{6}{1^2}\left(\frac{e^7}{2}\right)\right)$ M1A1

$y_1 = \frac{e^7}{2} - 0{,}2e^7$

$y_1 = \frac{3e^7}{10}$ AG

(ii) $23435{,}5461$ A2

[6]

(c) $23435{,}5461 < \frac{e^{11}}{2}$ R1

[1]