

# Solución de Práctica de Prueba 1 de AE NS Set 3

## Sección A

1. (a) La diferencia común  
 $= 95 - 100$   
 $= -5$  (M1) por enfoque válido  
A1 [2]
- (b) El décimoquinto término  
 $= 100 + (15 - 1)(-5)$   
 $= 30$  (A1) por sustitución  
A1 [2]
- (c) La suma de los primeros quince términos  
 $= \frac{15}{2} [2(100) + (15 - 1)(-5)]$   
 $= 975$  (A1) por sustitución  
A1 [2]
2. (a) El gradiente de  $L_1$  es 2. A1  
El punto de intersección con el eje  $y$  de  $L_1$  es  
 $-20$ . A1 [2]
- (b) El gradiente de  $L_2$  es  $-\frac{1}{2}$ . (A1) por valor correcto  
La ecuación de  $L_2$ :  
 $y - (-20) = -\frac{1}{2}(x - 0)$  A1  
 $y + 20 = -\frac{1}{2}x$   
 $2y + 40 = -x$   
 $x + 2y + 40 = 0$  A1 [3]

3.	(a)	(i)	4	A1	
		(ii)	$\frac{1}{3}$	A1	
		(iii)	-1	A1	[3]
	(b)	$\log_{27} x + \frac{8}{3} = \log_4 256 + \log_{125} 5 + \log_{\pi} \frac{1}{\pi}$			
		$\log_{27} x + \frac{8}{3} = 4 + \frac{1}{3} - 1$		(M1) por sustitución	
		$\log_{27} x = \frac{2}{3}$			
		$x = 27^{\frac{2}{3}}$		(A1) por enfoque correcto	
		$x = (3^3)^{\frac{2}{3}}$			
		$x = 3^2$			
		$x = 9$		A1	[3]
4.	$\left(1 - \frac{3}{4}x\right)^n (1 + 2nx)^3$				
	$= \left(1 + \binom{n}{1}\left(-\frac{3}{4}x\right) + \dots\right) \left(1 + \binom{3}{1}(2nx) + \dots\right)$			(M1) por expansión válida	
	$= \left(1 + (n)\left(-\frac{3}{4}x\right) + \dots\right) (1 + (3)(2nx) + \dots)$			(A1) por enfoque correcto	
	$= \left(1 - \frac{3}{4}nx + \dots\right) (1 + 6nx + \dots)$			A2	
	El coeficiente de $x$				
	$= (1)(6n) + \left(-\frac{3}{4}n\right)(1)$			(A1) por enfoque correcto	
	$= \frac{21}{4}n$				
	$\therefore \frac{21}{4}n = \frac{105}{4}$			(M1) por ecuación	
	$n = 5$			A1	[7]

5.

$$-3\sqrt{3} \leq f(x) \leq 3\sqrt{3}$$

$$-3\sqrt{3} \leq 6 \operatorname{sen} 2x \leq 3\sqrt{3}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \operatorname{sen} 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

A1

$$\therefore \operatorname{sen} \left( -\frac{\pi}{3} \right) \leq \operatorname{sen} 2x \leq \operatorname{sen} \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{sen} \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) \leq \operatorname{sen} 2x \leq \operatorname{sen} \left( \pi + \frac{\pi}{3} \right) \text{ o}$$

(A2) por rangos correctos

$$\operatorname{sen} \left( 2\pi - \frac{\pi}{3} \right) \leq \operatorname{sen} 2x \leq \operatorname{sen} \left( 2\pi + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$-\frac{\pi}{3} \leq 2x \leq \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \leq 2x \leq \frac{4\pi}{3} \text{ o } \frac{5\pi}{3} \leq 2x \leq \frac{7\pi}{3}$$

A1

$$-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3} \text{ o } \frac{5\pi}{6} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$$

(M1) por enfoque válido

$$\therefore 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3} \text{ o } \frac{5\pi}{6} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$$

A3

[8]

6. (a)  $E(X) = \int_{-2}^3 x \cdot \frac{1}{5} dx$  (A1) por sustitución
- $$E(X) = \left[ \frac{1}{10} x^2 \right]_{-2}^3$$
- $$E(X) = \frac{9}{10} - \frac{4}{10}$$
- $$E(X) = \frac{1}{2}$$
- A1 [2]
- (b)  $E(X^2) = \int_{-2}^3 x^2 \cdot \frac{1}{5} dx$  (A1) por sustitución
- $$E(X^2) = \left[ \frac{1}{15} x^3 \right]_{-2}^3$$
- $$E(X^2) = \frac{27}{15} - \left( -\frac{8}{15} \right)$$
- $$E(X^2) = \frac{7}{3}$$
- A1 [2]
- (c) La desviación típica (A1) por sustitución
- $$= \sqrt{E(X^2) - (E(X))^2}$$
- $$= \sqrt{\frac{7}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$
- $$= \sqrt{\frac{25}{12}}$$
- A1 [2]
7. (a)  $f(|-x|) = \frac{7-2|-x|}{3-|-x|}$  M1
- $$f(|-x|) = \frac{7-2|x|}{3-|x|}$$
- A1
- $$f(|-x|) = f(|x|)$$
- Por lo tanto,  $f(|x|)$  es una función par. AG
- (b)  $x = 3, x = -3$  A2 [2]
- (c)  $y = -2$  A1 [2]
- [1]

8.  $2(\sec \alpha + 2 \tan \alpha)^2 = 3 + 8 \sec \alpha \tan \alpha + 6 \tan^2 \alpha$

$$2(\sec^2 \alpha + 4 \sec \alpha \tan \alpha + 4 \tan^2 \alpha)$$

$$= 3 + 8 \sec \alpha \tan \alpha + 6 \tan^2 \alpha$$

$$2 \sec^2 \alpha + 8 \sec \alpha \tan \alpha + 8 \tan^2 \alpha$$

$$= 3 + 8 \sec \alpha \tan \alpha + 6 \tan^2 \alpha$$

$$2 \sec^2 \alpha + 2 \tan^2 \alpha = 3$$

$$\sec^2 \alpha + \tan^2 \alpha = \frac{3}{2}$$

$$1 + \tan^2 \alpha + \tan^2 \alpha = \frac{3}{2}$$

$$2 \tan^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\tan \alpha = -\frac{1}{2} \text{ o } \tan \alpha = \frac{1}{2} \text{ (Rechazada)}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\tan 2\alpha = -\frac{4}{3}$$

(M1) por enfoque válido

A1

(A1) por valor correcto

(M1) por enfoque válido

A1

[5]

9. Cuando  $n = 1$ ,  
 $1^3 + 3(1)^2 - 1 = 3$   
 $1^3 + 3(1)^2 - 1 = 3(1)$  A1  
 Por tanto, el enunciado es cierto para  $n = 1$ .  
 Suponemos que es cierto para  $n = k$ . M1  
 $k^3 + 3k^2 - k = 3M$ , donde  $M \in \mathbb{Z}$ .  
 Cuando  $n = k + 1$ ,  
 $(k + 1)^3 + 3(k + 1)^2 - (k + 1)$   
 $= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3(k^2 + 2k + 1) - k - 1$  M1  
 $= (3M + k - 3k^2) + 3k^2 + 3k + 1 + 3k^2 + 6k + 3 - k - 1$  A1  
 $= 3M + 3k^2 + 9k + 3$  M1  
 $= 3(M + k^2 + 3k + 1)$ , donde  $M + k^2 + 3k + 1 \in \mathbb{Z}$ . A1  
 Por tanto, el enunciado es cierto cuando  $n = k + 1$ .  
 Por lo tanto, el enunciado es cierto para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$ . R1

[7]

## Sección B

10. (a)  $g(x) - f(x) = 0$

$$e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} - e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) = 0$$

(M1) por enfoque válido

$$e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} \left(1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right)\right) = 0$$

$$1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) = 0$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) = 1$$

A1

$$\frac{\pi}{3}x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}x = \frac{5\pi}{2} \text{ o } \frac{\pi}{3}x = \frac{9\pi}{2}$$

(A1) por valores correctos

$$x = \frac{3}{2}, x = \frac{15}{2} \text{ o } x = \frac{27}{2}$$

A3

[6]

(b) (i)  $\frac{\pi}{3}x_n = \frac{\pi}{2} + (n-1)(2\pi)$

A1

$$x_n = \frac{3}{2} + 6(n-1)$$

$$x_{n+1} - x_n$$

$$= \left(\frac{3}{2} + 6((n+1)-1)\right) - \left(\frac{3}{2} + 6(n-1)\right)$$

M1

$$x_{n+1} - x_n = \left(\frac{3}{2} + 6n\right) - \left(\frac{3}{2} + 6n - 6\right)$$

$$x_{n+1} - x_n = 6$$

A1

Las diferencias entre cada par de términos consecutivos son todas 6.

Luego,  $x_1, x_2, x_3, \dots$  es una progresión aritmética.

AG

(ii)  $x_n = \frac{3}{2} + 6n - 6$

$$x_n = 6n - \frac{9}{2}$$

A1

[4]

(c) Nótese que  $x_2 = \frac{15}{2}$  y  $x_3 = \frac{27}{2}$ .

$$f(x) = 0$$

$$e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) = 0$$

M1

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{3}x = 3\pi \text{ o } \frac{\pi}{3}x = 4\pi$$

$$x = 9 \text{ o } x = 12$$

(A1) por valores correctos

$$\therefore R = \int_{\frac{15}{2}}^9 \left( e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} - e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) \right) dx + \int_9^{12} e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} dx$$

A2

$$+ \int_{12}^{\frac{27}{2}} \left( e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} - e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) \right) dx$$

[4]

11. (a)  $\vec{PS} = \vec{PQ} + \vec{QS}$   
 $\vec{PS} = \mathbf{r} + \frac{1}{\alpha+1} \vec{QR}$  (A1) por enfoque correcto  
 $\vec{PS} = \mathbf{r} + \frac{1}{\alpha+1} (\vec{PR} - \vec{PQ})$  (M1) por enfoque válido  
 $\vec{PS} = \mathbf{r} + \frac{1}{\alpha+1} (\mathbf{q} - \mathbf{r})$   
 $\vec{PS} = \frac{\alpha+1}{\alpha+1} \mathbf{r} + \frac{1}{\alpha+1} \mathbf{q} - \frac{1}{\alpha+1} \mathbf{r}$  (M1) por enfoque válido  
 $\vec{PS} = \frac{1}{\alpha+1} \mathbf{q} + \frac{\alpha}{\alpha+1} \mathbf{r}$  A1

[4]

(b)  $\because PS \perp QR$   
 $\therefore \vec{PS} \cdot \vec{QR} = 0$  M1  
 $\left( \frac{1}{\alpha+1} \mathbf{q} + \frac{\alpha}{\alpha+1} \mathbf{r} \right) \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r}) = 0$  A1  
 $(\mathbf{q} + \alpha \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r}) = 0$   
 $\mathbf{q} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r}) + \alpha \mathbf{r} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r}) = 0$  M1  
 $\alpha \mathbf{r} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r}) = -\mathbf{q} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r})$   
 $\alpha \mathbf{r} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r}) = \mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q})$  M1  
 $\alpha = \frac{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q})}{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r})}$  AG

[4]

(c)  $\vec{PS} = \frac{1}{\alpha+1} \mathbf{q} + \frac{\alpha}{\alpha+1} \mathbf{r}$   
 $\vec{PS} = \frac{1}{\alpha+1} (\mathbf{q} + \alpha \mathbf{r})$   
 $\vec{PS} = \frac{1}{\frac{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q})}{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r})} + 1} \left( \mathbf{q} + \frac{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q})}{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r})} \mathbf{r} \right)$  M1  
 $\vec{PS} = \frac{1}{\frac{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q})}{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r})} + \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r})}{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r})}} \left( \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r})}{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r})} \mathbf{q} + \frac{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q})}{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r})} \mathbf{r} \right)$  M1  
 $\vec{PS} = \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r})}{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q}) + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r})} \left( \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r})}{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r})} \mathbf{q} + \frac{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q})}{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r})} \mathbf{r} \right)$  A1

$$\vec{PS} = \frac{(\mathbf{r} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r}))\mathbf{q} + (\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q}))\mathbf{r}}{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q}) + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r})} \quad \text{M1}$$

$$\vec{PS} = \frac{(\mathbf{r} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r}))\mathbf{q} + (\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q}))\mathbf{r}}{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q}) - \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q})} \quad \text{A1}$$

$$\vec{PS} = \frac{(\mathbf{r} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r}))\mathbf{q} + (\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q}))\mathbf{r}}{(\mathbf{q} - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q})}$$

$$\vec{PS} = -\frac{(\mathbf{r} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r}))\mathbf{q} + (\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q}))\mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{q}|^2} \quad \text{A1}$$

$$\vec{PS} = \frac{(\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q}))\mathbf{q} - (\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q}))\mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{q}|^2} \quad \text{AG}$$

[6]

(d) (i)  $\alpha = \frac{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q})}{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r})}$

$$\alpha = \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{q} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}$$

(M1) por enfoque válido

$$\alpha = \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - |\mathbf{q}|^2}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{q} - |\mathbf{r}|^2}$$

$$\alpha = \frac{0 - 20^2}{0 - 15^2}$$

(A1) por sustitución

$$\alpha = \frac{16}{9}$$

A1

(ii)  $QR = \sqrt{20^2 + 15^2}$

$$QR = 25$$

(A1) por valor correcto

$$RS = 25 \left( \frac{\frac{16}{9}}{\frac{16}{9} + 1} \right)$$

$$RS = 16$$

(A1) por valor correcto

$$PS = \sqrt{20^2 - 16^2}$$

$$PS = 12$$

(A1) por valor correcto

El área requerida

$$= \frac{(16)(12)}{2}$$

$$= 96$$

A1

[7]

12. (a)  $R^2 = OP^2 + r^2$  (M1) por enfoque válido

$$R^2 = (h - R)^2 + r^2$$

$$R^2 = h^2 - 2Rh + R^2 + r^2$$

$$2Rh - h^2 = r^2$$

A1

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\therefore V = \frac{1}{3}\pi(2Rh - h^2)(h)$$

(A1) por sustitución

$$\therefore V = \frac{2R}{3}\pi h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$$

A1

[4]

(b)  $V = \frac{2R}{3}\pi h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$

$$\frac{dV}{dh} = \frac{2R}{3}\pi(2h) - \frac{1}{3}\pi(3h^2)$$

M1A1

$$\frac{dV}{dh} = \frac{4R}{3}\pi h - \pi h^2$$

A1

$$\frac{d^2V}{dh^2} = \frac{4R}{3}\pi(1) - \pi(2h)$$

A1

$$\frac{d^2V}{dh^2} = \frac{4R}{3}\pi - 2\pi h$$

AG

[4]

$$(c) \quad \frac{dV}{dh} = 0$$

$$\therefore \frac{4R}{3} \pi h - \pi h^2 = 0 \quad \text{M1}$$

$$\frac{4R}{3} - h = 0$$

$$h = \frac{4R}{3} \quad \text{A1}$$

$$\left. \frac{d^2V}{dh^2} \right|_{h=\frac{4R}{3}} = \frac{4R}{3} \pi - 2\pi \left( \frac{4R}{3} \right) \quad \text{M1}$$

$$\left. \frac{d^2V}{dh^2} \right|_{h=\frac{4R}{3}} = -\frac{4R}{3} \pi$$

$$\left. \frac{d^2V}{dh^2} \right|_{h=\frac{4R}{3}} < 0 \quad \text{R1}$$

Por lo tanto,  $V$  alcanza el valor máximo

cuando  $h = \frac{4R}{3}$ .

$$2R \left( \frac{4R}{3} \right) - \left( \frac{4R}{3} \right)^2 = r^2 \quad \text{A1}$$

$$\frac{8R^2}{3} - \frac{16R^2}{9} = r^2 \quad \text{M1}$$

$$\frac{8R^2}{9} = r^2$$

$$r = \frac{2\sqrt{2}R}{3}$$

Por lo tanto,  $V$  alcanza su máximo cuando

$$r = \frac{2\sqrt{2}R}{3}. \quad \text{AG}$$

$$(d) \quad \frac{32}{81} \pi R^3 \quad \text{A2}$$

[6]

[2]

(e) La generatriz del cono circular

$$= \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}R}{3}\right)^2 + \left(\frac{4R}{3}\right)^2} \quad \text{(M1) por enfoque válido}$$

$$= \sqrt{\frac{24}{9}R^2}$$

$$= \frac{\sqrt{24}R}{3}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}R}{3} \quad \text{A1}$$

El área de la superficie curva del cono circular

$$= \pi \left(\frac{2\sqrt{2}R}{3}\right) \left(\frac{2\sqrt{6}R}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{9}\sqrt{12}\pi R^2$$

$$< \frac{4}{9}(4)\pi R^2 \quad \text{R1}$$

$$= \frac{16}{9}\pi R^2$$

Por lo tanto, el área de la superficie curva del

cono no es mayor que  $\frac{16}{9}\pi R^2$  cuando su

volumen alcanza su máximo. A1

[4]