

Solución de Práctica de Prueba 2 de AE NS Set 1

Sección A

1. (a) $y = 3x + 7$
 $\Rightarrow x = 3y + 7$ (A1) por enfoque correcto
 $3y = x - 7$
 $y = \frac{x-7}{3}$
 $\therefore f^{-1}(x) = \frac{x-7}{3}$ A1 [2]
- (b) $(f \circ g)(x)$
 $= 3g(x) + 7$ (A1) por sustitución
 $= 3(2\sqrt{x}) + 7$
 $= 6\sqrt{x} + 7$ A1 [2]
- (c) $(f \circ g)(529)$
 $= 6\sqrt{529} + 7$ (M1) por sustitución
 $= 145$ A1 [2]

2. (a) El volumen
 $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$ (M1) por enfoque válido
 $= \frac{1}{3} \pi (18)^2 (18)$
 $= 6107,256119$ (A1) por valor correcto
 $= 6110$
 $= 6,11 \times 10^3 \text{ cm}^3$ A1 [3]
- (b) $V = 27 \left(\frac{2}{3} \pi R^3 \right)$ (M1) por inecuación
 $16(6107,256119) = 18\pi R^3$ (A1) por sustitución
 $R^3 = 1728$
 $R = 12$ A1
La razón
 $= 18:12$
 $= 3:2$ A1 [4]
3. (a) $r = \frac{5,4}{4,5}$ (M1) por enfoque válido
 $r = 1,2$ A1 [2]
- (b) $S_{12} = \frac{4,5(1,2^{12} - 1)}{1,2 - 1}$ (A1) por sustitución
 $S_{12} = 178,1122601$
 $S_{12} = 178$ A1 [2]
- (c) $u_n < 678$
 $4,5 \cdot 1,2^{n-1} < 678$
 $4,5 \cdot 1,2^{n-1} - 678 < 0$ (M1) por enfoque válido
Considerando el gráfico de $y = 4,5 \cdot 1,2^{n-1} - 678$,
 $n < 28,50673$. A1
Por lo tanto, el mayor valor de n es 28. A1 [3]

4. (a) $20P_1 - 17P_0 = 0$
 $\therefore 20(P_0 e^{k(1)}) - 17P_0 = 0$ A1
 $20e^k - 17 = 0$
 $e^k = 0,85$ M1
 $k = \ln 0,85$ AG
- (b) $\frac{P_t}{P_0} \leq 0,5$
 $\therefore \frac{P_0 e^{(\ln 0,85)t}}{P_0} \leq 0,5$ (A1) por inecuación correcta
 $e^{(\ln 0,85)t} \leq 0,5$ (A1) por enfoque correcto
 $(\ln 0,85)t \leq \ln 0,5$
 $(\ln 0,85)t - \ln 0,5 \leq 0$ A1
Considerando el gráfico de
 $y = (\ln 0,85)t - \ln 0,5, t \geq 4,2650243.$ (M1) por enfoque válido
Por lo tanto, el menor número de años
completos es 43. A1
5. (a) $AB^2 = r^2 + r^2 - 2(r)(r) \cos 2\alpha$ A1
 $AB^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos 2\alpha$
 $AB = \sqrt{2r^2 - 2r^2 \cos 2\alpha}$ A1
 $AB = \sqrt{2r^2(1 - \cos 2\alpha)}$
 $AB = r\sqrt{2(1 - \cos 2\alpha)}$ AG
- (b) La longitud del arco ACB
 $= (r)(2\alpha)$ A1
 $= 2r\alpha$
 $\therefore P$
 $= 2r\alpha + r\sqrt{2(1 - \cos 2\alpha)}$ M1
 $= 2r\alpha + r\sqrt{2(1 - (1 - 2\sin^2 \alpha))}$ A1
 $= 2r\alpha + r\sqrt{2(2\sin^2 \alpha)}$ A1
 $= 2r\alpha + r\sqrt{4\sin^2 \alpha}$
 $= 2r\alpha + 2r \sin \alpha$ A1
 $= 2r(\alpha + \sin \alpha)$ AG

[2]

[5]

[2]

[5]

6. Por utilizar operaciones de fila ,el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 2 \\ 32 & 24 & -17 & 5 \end{array} \right) \text{ se reduce a } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{11}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{9}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (\text{M1) por enfoque v\u00e1lido}$$

$$y + \frac{9}{8}z = \frac{3}{8}$$

$$y = \frac{3}{8} - \frac{9}{8}z$$

A1

$$x - \frac{11}{8}z = -\frac{1}{8}$$

$$x = -\frac{1}{8} + \frac{11}{8}z$$

A1

Sea $z = t$.

$$x = -\frac{1}{8} + \frac{11}{8}t, \quad y = \frac{3}{8} - \frac{9}{8}t$$

Por lo tanto, la ecuaci\u00f3n vectorial de la recta de

$$\text{intersecci\u00f3n es } \mathbf{r} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{11}{8} \\ -\frac{9}{8} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{A2}$$

[5]

7. (a) $\frac{1-x}{1+ax}$
 $= (1-x)(1+ax)^{-1}$
 $= (1-x) \left(1 + (-1)(ax) + \frac{(-1)(-2)}{2!} (ax)^2 + \dots \right)$ M1A1
 $= (1-x)(1-ax+a^2x^2+\dots)$
 $= 1-ax+a^2x^2-x+ax^2-a^2x^3+\dots$
 $= 1+(-a-1)x+(a^2+a)x^2+\dots$ A1

[3]

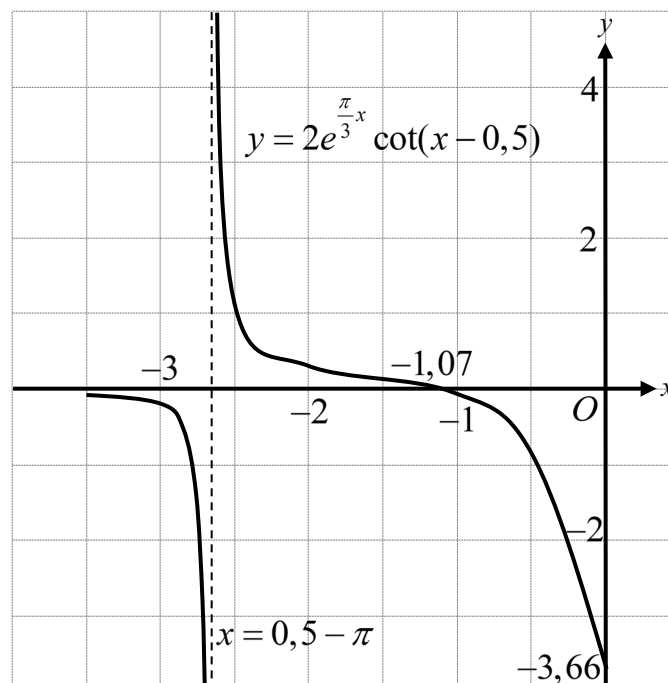
(b) (i) $1+(a^2+a)=21$ (A1) por ecuación correcta
 $a^2+a-20=0$
 $(a+5)(a-4)=0$
 $a=-5$ (*Rechazado*) o $a=4$ A1

(ii) -5 A1

[3]

8. (a) Por forma correcta A1
 Por asíntota correcta A1
 Por puntos de corte correctos A1

[3]



(b) $0,0442 \leq k \leq 3,66$ A2

[2]

9.

$$y = 4^{-x}$$

$$\log_4 y = -x$$

$$x = -\log_4 y$$

(A1) por enfoque correcto

$$y = 4^{-0}$$

$$y = 1$$

(A1) por valor correcto

$$-\log_4 y = -\frac{1}{32}(y-24)^2$$

(M1) por inecuación

$$\frac{1}{32}(y-24)^2 - \log_4 y = 0$$

Considerando el gráfico de $x = \frac{1}{32}(y-24)^2 - \log_4 y$,

$$y = 16.$$

(A1) por valor correcto

$$0 = -\frac{1}{32}(y-24)^2$$

$$0 = (y-24)^2$$

$$y = 24$$

(A1) por valor correcto

El área de R

$$= -\int_1^{16} (-\log_4 y) dy - \int_{16}^{24} -\frac{1}{32}(y-24)^2 dy$$

A1

$$= 26,51312053$$

$$= 26,5$$

A1

[7]

Sección B

10. (a) La probabilidad requerida
 $= P(T \leq 24)$ (M1) por enfoque válido
 $= 0,9452007106$
 $= 0,945$ A1 [2]
- (b) $P(U \leq 48) = 0,99494$
 $P\left(Z \leq \frac{48 - \mu}{7}\right) = 0,99494$ (M1) por estandarización
 $\frac{48 - \mu}{7} = 2,571701859$ A1
 $48 - \mu = 18,00191301$
 $\mu = 29,99808699$
 $\mu = 30,0$ A1 [3]
- (c) La probabilidad requerida
 $= P(U \leq 36)$ R1
 $= 0,8043925789$ A1
 Por lo tanto, de todos los autobuses escolares que salen a las 8:24 am, 80,439% de ellos llegan al clase a tiempo. AG [2]
- (d) La probabilidad requerida
 $= 1 - P(T \leq 12)P(U \leq 48)$
 $- P(12 < T \leq 24)P(U \leq 36)$ M1A1
 $= 1 - (0,2118553337)(0,99494)$
 $- (0,7333453769)(0,80439)$ (A2) por valores correctos
 $= 0,1993209666$
 $= 0,199$ A1 [5]
- (e) El número esperado
 $= (20)(0,1993209666)$ (A1) por fórmula correcta
 $= 3,986419331$
 $= 3,99$ A1 [2]

11. (a) Sean \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 los vectores normales a los planos π_1 y π_2 respectivamente.

$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ k \end{pmatrix}, \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ k \end{pmatrix}$$

(A1) por valores correctos

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} (3)(k) - (k)(-3) \\ (k)(4) - (4)(k) \\ (4)(-3) - (3)(4) \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ donde } \beta \text{ es una}$$

constante.

(A1) por sustitución

$$\begin{pmatrix} 6k \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \frac{6k}{-24} = \frac{-3}{1}$$

A1

$$k = 12$$

A1

- (b) (i) $a = 6, b = 8, c = 2, \alpha = -6$

A4

[4]

- (ii) Sea O el origen.

El volumen de la piramide $A'ABC$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{(A'A)(OB)}{2} \right) (OC)$$

(M1) por enfoque válido

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{(6 - (-6))(8)}{2} \right) (2)$$

A1

$$= 32$$

A1

[7]

(c) (i) $\vec{AC}' = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$
 $\vec{AC}' \cdot (-\mathbf{i}) = |\vec{AC}'| |-\mathbf{i}| \cos C'\hat{A}A'$ (M1) por enfoque válido
 $(-6\mathbf{i} - 2\mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{i})$
 $= (\sqrt{(-6)^2 + (-2)^2})(1) \cos C'\hat{A}A'$ (A1) por sustitución
 $(-6)(-1) + (-2)(0) = \sqrt{40} \cos C'\hat{A}A'$
 $\cos C'\hat{A}A' = \frac{6}{\sqrt{40}}$
 $C'\hat{A}A' = 18,43494882^\circ$
 $C'\hat{A}A' = 18,4^\circ$ A1

(ii) $\therefore C'A' = C'A$
 $\therefore C'\hat{A}'A = 18,43494882^\circ$ (A1) por enfoque correcto
 $A\hat{C}'A' + 18,43494882^\circ + 18,43494882^\circ = 180^\circ$
 $A\hat{C}'A' = 143,1301024^\circ$
 $A\hat{C}'A' = 143^\circ$ A1

[5]

(d) La ecuación vectorial de L :

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 4s \\ y = 3s \\ z = 2 + 12s \end{cases}$$
 (A1) por enfoque correcto

$\therefore 4(4s) - 3(3s) + 12(2 + 12s) = -24$ (A1) por sustitución

$$151s = -48 \Rightarrow s = -\frac{48}{151}$$

$$\begin{cases} x = 4\left(-\frac{48}{151}\right) = -1,271523179 \\ y = 3\left(-\frac{48}{151}\right) = -0,9536423841 \\ z = 2 + 12\left(-\frac{48}{151}\right) = -1,814569536 \end{cases}$$
 M1

Por lo tanto, las coordenadas de Q son $(-1,2715; -0,9536; -1,8146)$. A1

[4]

12. (a) (i) $f'(x) = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)(2x)$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ A1

$f''(x) = \frac{(x^2+1)(2) - (2x)(2x)}{(x^2+1)^2}$ (M1) por enfoque válido

$f''(x) = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2}$

$f''(x) = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$ A1

$(x^2+1)^2(-4x)$

$f^{(3)}(x) = \frac{-(2-2x^2)(2)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4}$ (M1) por enfoque válido

$f^{(3)}(x) = \frac{-4x^3-4x-8x+8x^3}{(x^2+1)^3}$

$f^{(3)}(x) = \frac{4x^3-12x}{(x^2+1)^3}$ A1

(ii)

$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0)$

$+ \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \frac{x^4}{4!}f^{(4)}(0) + \dots$

$f(x) = \ln(0^2+1) + x\left(\frac{2(0)}{0^2+1}\right)$

$+ \frac{x^2}{2}\left(\frac{2-2(0)^2}{(0^2+1)^2}\right) + \frac{x^3}{6}\left(\frac{4(0)^3-12(0)}{(0^2+1)^3}\right)$ M2

$+ \frac{x^4}{24}\left(\frac{-12(0^4-6(0)^2+1)}{(0^2+1)^4}\right) + \dots$

$f(x) = 0 + x(0) + \frac{x^2}{2}(2)$ A2

$+ \frac{x^3}{6}(0) + \frac{x^4}{24}(-12) + \dots$

$f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \dots$ A1

[10]

(b) $\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$\ln((x^2 + 1)^{\text{sen } x})$$

$$= \text{sen } x \ln(x^2 + 1)$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right) \left(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \dots\right)$$

$$= x^3 - \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^5 + \dots$$

$$= x^3 - \frac{2}{3}x^5 + \dots$$

(A1) por enfoque correcto

M1A1

(M1) por enfoque válido

A1

[5]

(c) El valor aproximado del volumen

$$= \int_{0,7}^{1,3} \pi \left(y \sqrt{\ln((y^2 + 1)^{\text{sen } y})} \right)^2 dy$$

(M1) por enfoque válido

$$= \int_{0,7}^{1,3} \pi y^2 \ln((y^2 + 1)^{\text{sen } y}) dy$$

$$\approx \int_{0,7}^{1,3} \pi y^2 \left(y^3 - \frac{2}{3} y^5 \right) dy$$

A1

$$\approx \int_{0,7}^{1,3} \pi \left(y^5 - \frac{2}{3} y^7 \right) dy$$

(M1) por enfoque válido

$$\approx 0,3452245902$$

$$\approx 0,345$$

A1

[4]