Contenidos

La página de soluciones de este libro

https://www.seprodstore.com/ibaahlpapermaterial-esp O

Distribuciones de Preguntas		**Set 1**		**Set 2**		**Set 3**		**Set 4**	
		P1	**P2**	**P1**	**P2**	**P1**	**P2**	**P1**	**P2**
	Notación Científica								
	Sistemas de Ecuaciones						7		
	Progresiones Aritméticas					1			
	Progresiones Geométricas		3						4
1	Teorema del Binomio		7		1	4			5
	Inducción Matemática	8		7		9		9	
	Pruebas e Identidades	3		2					
	Números Complejos	12			12		12	11	
	$n\mathrm{P}r$ y $n\mathrm{C}r$				9				8
	Funciones Cuadráticas			4					1
	Funciones	7	1	1	7	7	4	2	7
2	Funciones Exp. y Log.		4	5		3		3	
	Polinomios	6		3			6		6
	Geometría Coordenada	2				2			
	Trigonometría	5	8	6	8	5,8	3	7	2
3	Trigonometría 2-D		5		3		5	1	3
	Áreas y Volúmenes		2		2				
	Vectores		6,11	11	6	11	8	8	11
	Estadísticas	1					1	5	
	Probabilidad								
	Distribuciones Discretas							10	
4	Distribución Binomial				4				
	Distribuciones Continua	9		9		6			9
	Distribución Normal		10		10				
	Análisis Bivariado						10		
	Diferenciación	4							
	Aplis. de Diferenciación			10		12			
5	Integración								
	Aplis. de Integración	10	9		5,11	10	2	4,12	10
	Límites y Serie Maclaurin		12	8			9	6	
	Ecuaciones Diferenciales	11		12			11		12

Lista de Fórmulas de Análisis y Enfoques Nivel Superior para las Matemáticas del PD del IB

Análisis y Enfoques Nivel Medio	**Análisis y Enfoques Nivel Superior**
Aplicaciones e Interpretación Nivel Medio	**Aplicaciones e Interpretación Nivel Superior**

7 Progresiones Aritméticas

✓ Propriedades de una progresión aritmética u_n:

1. u_1: Primer término
2. $d = u_2 - u_1 = u_n - u_{n-1}$: Diferencia común
3. $u_n = u_1 + (n-1)d$: Término general (n-ésimo término)
4. $S_n = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[u_1 + u_n]$: La suma de los primeros n términos

✓ $\sum_{r=1}^{n} u_r = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n$: Signo de sumatorio

8 Progresiones Geométricas

✓ Propriedades de una progresión geométrica u_n:

1. u_1: Primer término
2. $r = u_2 \div u_1 = u_n \div u_{n-1}$: Razón común
3. $u_n = u_1 \times r^{n-1}$: Término general (n-ésimo término)
4. $S_n = \frac{u_1(1-r^n)}{1-r}$: La suma de los primeros n términos
5. $S_\infty = \frac{u_1}{1-r}$: La suma de los infinitos términos, dado que $-1 < r < 1$

9 Teorema del Binomio

✓ Propriedades del n factorial $n!$:

1. $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$
2. $0! = 1$
3. $n! = n \times (n-1)!$

- Propriedades del coeficiente combinación $\binom{n}{r}$:

1. $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$
2. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
3. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
4. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$

- El teorema del binomio:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

$= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$, donde el $(r+1)$ -ésimo término $= \binom{n}{r}a^{n-r}b^r$

- Teorema del binomio extendido para $|x| < 1$:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \cdots$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{(n)(n-1)}{(2)(1)}x^2 + \frac{(n)(n-1)(n-2)}{(3)(2)(1)}x^3 + \cdots$$

10 Inducción Matemática

- Pasos para probar por inducción matemática:
  1. Demuestre que la afirmación $P(n)$ es verdadera cuando $n = 1$
  2. Asuma que $P(n)$ es cierto cuando $n = k$
  3. Demuestre que la afirmación $P(n)$ es verdadera cuando $n = k+1$
  4. Concluya que $P(n)$ es cierto para todos los enteros positivos n

- Tipos de inducción matemática:
  1. Caso general
  2. Divisibilidad

17 Números Complejos

✓ Terminologías de números complejos:

$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$: Unidad imaginaria

$z=a+b\mathrm{i}$: Número complejo en forma cartesiana

a : Parte real de z

b : Parte imaginaria de z

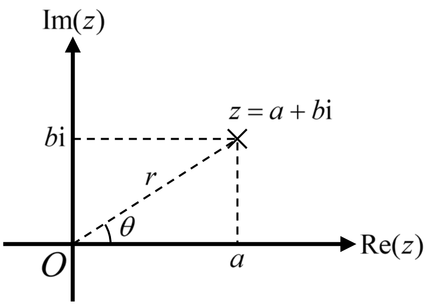
$z^{*}=a-b\mathrm{i}$: Conjugado de $z=a+b\mathrm{i}$

$|z|=r=\sqrt{a^{2}+b^{2}}$: Módulo de $z=a+b\mathrm{i}$

$\arg(z)=\theta=\arctan\dfrac{b}{a}$: Argumento de $z=a+b\mathrm{i}$

✓ Propiedades del diagrama de Argand:

1. Eje real: Eje horizontal
2. Eje imaginario: Eje vertical



✓ Formas de números complejos:

1. $z=a+b\mathrm{i}$: Forma cartesiana
2. $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)=r\,\mathrm{cis}\,\theta$: Forma módulo-argumento
3. $z=re^{\mathrm{i}\theta}$: Forma de Euler

✓ Propiedades de módulos y argmentos de números complejos z_1 y z_2 :

1. $|z_1 z_2|=|z_1||z_2|$
2. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
3. $\arg(z_1 z_2)=\arg z_1+\arg z_2$
4. $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2$

✓ Si $z=a+b\mathrm{i}$ es una raíz de la ecuación polinomial $p(z)=0$, entonces $z^{*}=a-b\mathrm{i}$ es también una raíz de $p(z)=0$

✓ Las raíces de la ecuación $z^n = r\text{cis}\theta$ son $z = r^{\frac{1}{n}}\text{cis}\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$

✓ Teorema de De Moivre:

Si $z = r\text{cis}\theta$, entonces $z^n = r^n\text{cis}n\theta$

18 Diferenciación

✓ Derivadas de una función $y = f(x)$:

1. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$: Primera derivada
2. $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = f''(x)$: Segunda derivada
3. $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f^{(n)}(x)$: n-ésima derivada

✓ Reglas de diferenciación:

$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$	$f(x) = p(x) + q(x) \Rightarrow f'(x) = p'(x) + q'(x)$
$f(x) = \text{sen}\, x \Rightarrow f'(x) = \cos x$	$f(x) = cp(x) \Rightarrow f'(x) = cp'(x)$
$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\text{sen}\, x$	$f(x) = p(q(x)) \Rightarrow f'(x) = p'(q(x)) \cdot q'(x)$
$f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$f(x) = p(x)q(x)$ $\Rightarrow f'(x) = p'(x)q(x) + p(x)q'(x)$
$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$	$f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ $\Rightarrow f'(x) = \dfrac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{(q(x))^2}$
$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$	

Análisis y Enfoques Nivel Superior para las Matemáticas del PD del IB Prueba de Práctica Set 1 – Prueba 1 (120 Minutos)

Libro de Preguntas – Respuestas

Instrucciones

1. Esta prueba consta de **DOS** secciones: A y B.

2. Conteste **TODAS** las preguntas. Escriba sus respuestas en los espacios provistos por este Libro de Preguntas - Respuestas.

3. No se permite el uso de ninguna calculadora.

4. Se le sugiere preparar un folleto de fórmulas de Análisis y Enfoques para las Matemáticas del PD del IB cuando intente responder las preguntas.

5. Se entregarán las hojas de respuestas y papeles gráficos adicionales a pedido.

6. Salvo que se indique lo contrario, **TODO** el trabajo debe mostrarse claramente.

7. Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, las respuestas numéricas deberán ser **EXACTAS** o aproximadas con **TRES CIFRAS SIGNIFICATIVAS**.

8. Los diagramas de este documento **NO** están necesariamente dibujados a escala.

9. Información que debe leerse antes de comenzar el examen:

	Solo para uso del Marcador	**Solo para uso del Examinador**	
Número de Pregunta	**Puntos**	**Puntos**	**Puntuación Máxima**
Sección A			
1			**6**
2			**5**
3			**6**
4			**8**
5			**7**
6			**7**
7			**5**
8			**7**
9			**5**
Sección A Total			**56**
Sección B			
10			**14**
11			**20**
12			**20**
Sección B Total			**54**
Total			
Prueba 1 Total			**110**

4. Sea $f(x) = px^3 + qx^2 - 2x + 1$. En $x = 1$, la pendiente de la recta normal a la curva de f es $-\frac{1}{15}$. Sabiendo que $f^{-1}(41) = 2$, halle el valor de p y de q.

[8]

5. El gráfico de f viene dado por $f(t) = a\,\text{sen}\,b(t + 2{,}5) + d$, $a > 0$, $t \geq 0$.

Cuando $t = 2$, hay un valor máximo de 37, en P. Cuando $t = 11$, hay un valor mínimo de -5. El gráfico de f es estrictamente decreciente en $2 < t < 11$.

(a) Muestre que $f(t) = 21\,\text{sen}\,\frac{\pi}{9}(t + 2{,}5) + 16$.

[5]

El gráfico de f se trasforma en el gráfico de g mediante un estrechamiento horizontal de factor 3, seguido por una traslación de $\begin{pmatrix} 17 \\ 8 \end{pmatrix}$. Sea P' el punto imagen de P.

(b) Halle las coordenadas de P'.

[2]

6. Considera la función $f(x)=4x^4+3x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$. El gráfico de f se traslada en una unidad a la derecha y se estrecha verticalmente con un factor de escala 3 para convertirse en la función $g(x)$.

(a) Exprese $g(x)$ de la forma $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, donde a, b, c, d, $e\in\mathbb{Z}$.

[5]

(b) A partir de lo anterior, halle la suma de las raíces de la ecuación $g(x)=0$.

[2]

11. Una función es definida como $h(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = h(x) \cdot (y+1)$, $y > -1$, donde $y = 0$ con $x = 0$, dando la respuesta de la forma $y = f(x)$.

[8]

(b) Utilizando el método del factor de integración, muestre que la solución de la ecuación diferencial $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = h(x)\sqrt{1-(h(x))^2} \cdot (y+1)$, donde $y = 0$ cuando $x = 0$, es $y = e^{\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x} - 1$.

[12]

Análisis y Enfoques Nivel Superior para las Matemáticas del PD del IB Prueba de Práctica Set 1 – Prueba 2 (120 Minutos)

Libro de Preguntas – Respuestas

Instrucciones

1. Esta prueba consta de **DOS** secciones: A y B.

2. Conteste **TODAS** las preguntas. Escriba sus respuestas en los espacios provistos por este Libro de Preguntas - Respuestas.

3. Es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.

4. Se le sugiere preparar un folleto de fórmulas de Análisis y Enfoques para las Matemáticas del PD del IB cuando intente responder las preguntas.

5. Se entregarán las hojas de respuestas y papeles gráficos adicionales a pedido.

6. Salvo que se indique lo contrario, **TODO** el trabajo debe mostrarse claramente.

7. Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, las respuestas numéricas deberán ser **EXACTAS** o aproximadas con **TRES CIFRAS SIGNIFICATIVAS**.

8. Los diagramas de este documento **NO** están necesariamente dibujados a escala.

9. Información que debe leerse antes de comenzar el examen:

	Solo para uso del Marcador	**Solo para uso del Examinador**	
Número de Pregunta	**Puntos**	**Puntos**	**Puntuación Máxima**
Section A			
1			**6**
2			**7**
3			**7**
4			**7**
5			**7**
6			**5**
7			**6**
8			**5**
9			**7**
Sección A Total			**57**
Section B			
10			**14**
11			**20**
12			**19**
Sección B Total			**53**
Total			
Prueba 2 Total			**110**

6. Halle la ecuación vectorial de la recta de intersección de los tres planos representados por el siguiente sistema de ecuaciones.

$$x + 3y + 2z = 1$$
$$5x + 7y + z = 2$$
$$32x + 24y - 17z = 5$$

[5]

7. (a) Utilizando la expansión binomial, halle los primeros tres términos de la expansión de $\dfrac{1-x}{1+ax}$ en potencias ascendentes de x hasta x^2, dando su respuesta en términos de a.

[3]

Sabiendo que la suma del coeficiente de x^2 y el término constante es 21, donde $a > 0$.

(b) (i) Halle el valor de a.

(ii) A partir de lo anterior, escriba el coeficiente de x.

[3]

9. La región R está delimitada por el gráfico de $y = 4^{-x}$, el gráfico de $x = -\frac{1}{32}(y-24)^2$ y el eje y. Halle el área de R.

[7]

11. Las ecuaciones cartesianas de los planos π_1 y π_2 son $4x+3y+kz=24$ y $4x-3y+kz=-24$ respectivamente, $k \in \mathbb{R}$. La ecuación vectorial de la recta de intersección de los planos π_1 y π_2 viene dada por $\mathbf{r}=\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$.

(a) Halle k.

[4]

(b) El plano π_1 corta a los ejes x, y y z en $\mathrm{A}(a,0,0)$, $\mathrm{B}(0,b,0)$ y $\mathrm{C}(0,0,c)$ respectivamente. El plano π_2 corta a los ejes x, y y z en $\mathrm{A}'(\alpha,0,0)$, B and $\mathrm{C}'(0,0,-c)$ respectivamente, donde A' es el punto reflejado de A sobre el plano y-z.

(i) Escriba los valores de a, b, c y α.

(ii) A partir de lo anterior, halle el volumen de la pirámide $\mathrm{A'ABC}$.

[7]

(c) (i) Halle el ángulo entre AC' y el eje x.

(ii) A partir de lo anterior, halle el tamaño de $\mathrm{A\hat{C}'A'}$.

[5]

(d) La recta L pasa por el punto C y es perpendicular al plano ABC. Sabiendo que la recta L corta al plano $\mathrm{A'BC'}$ en Q. Halle las coordenadas de Q, dando su respuesta redondeada a cuatro lugares decimales.

[4]

Análisis y Enfoques Nivel Superior para las Matemáticas del PD del IB
Prueba de Práctica Set 1 – Prueba 3 (60 Minutos)

Libro de Preguntas – Respuestas

Instrucciones

1. Conteste **TODAS** las preguntas. Escriba sus respuestas en los espacios provistos por este Libro de Preguntas - Respuestas.

2. Es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.

3. Se le sugiere preparar un folleto de fórmulas de Análisis y Enfoques para las Matemáticas del PD del IB cuando intente responder las preguntas.

4. Se entregarán las hojas de respuestas y papeles gráficos adicionales a pedido.

5. Salvo que se indique lo contrario, **TODO** el trabajo debe mostrarse claramente.

6. Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, las respuestas numéricas deberán ser **EXACTAS** o aproximadas con **TRES CIFRAS SIGNIFICATIVAS**.

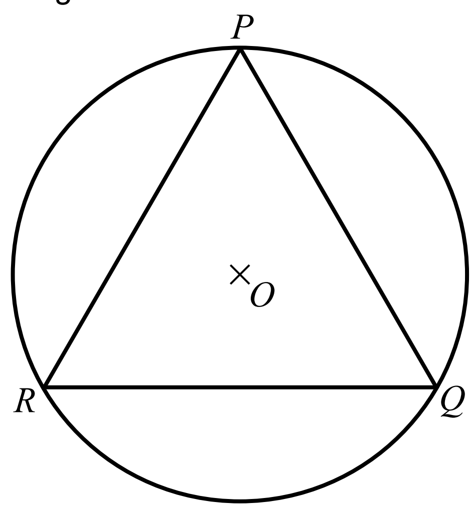
7. Los diagramas de este documento **NO** están necesariamente dibujados a escala.

8. Información que debe leerse antes de comenzar el examen:

	Solo para uso del Marcador	**Solo para uso del Examinador**	
Número de Pregunta	**Puntos**	**Puntos**	**Puntuación Máxima**
1			**27**
2			**28**
Total			
Prueba 3 Total			**55**

1. Se pide que investigues la diferencia entre el área de un círculo unitario y el área de un polígono inscrito.

El triángulo PQR es un triángulo equilátero inscrito, en el círculo unitario, tal como lo muestra el diagrama:



P, Q y R son puntos fijos en la circunferencia tal que QR es horizontal.

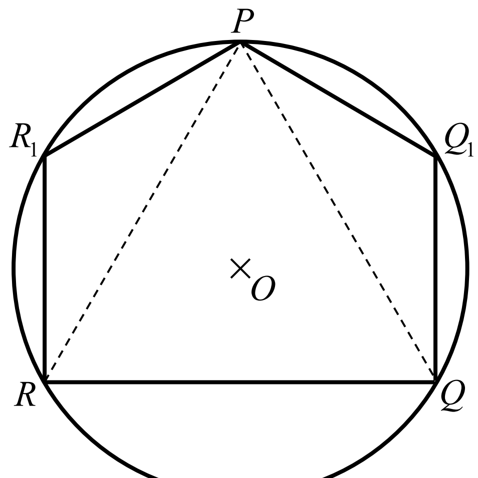
Sea A_1 la diferencia entre el área del círculo unitario y el área del triángulo equilátero PQR.

(a) (i) Escriba $\mathrm{P\hat{O}Q}$.

(ii) Muestre que A_1 puede expresarse como $\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{2\pi}{3}-\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$.

[4]

Los puntos Q_1 y R_1 están en el arco PQ y PR respectivamente tales que $\overset{\frown}{\mathrm{PQ_1}}=\overset{\frown}{\mathrm{Q_1Q}}=\overset{\frown}{\mathrm{RR_1}}=\overset{\frown}{\mathrm{R_1P}}$, como se muestra el siguiente diagrama:



2. Se pide que investigues la factorización de una ecuación polinómica compleja de grado par.

(a) (i) Resuelva la ecuación cuadrática $w^2 - w + 1 = 0$, exprese las raíces en la forma $\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta$, $-\pi < \theta \leq \pi$.

(ii) A partir de lo anterior, muestre que las raíces $u^4 - u^2 + 1 = 0$ son $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$, $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}$ y $\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\frac{5\pi}{6}$.

(iii) Resuelva la ecuación cuadrática $z^{2n} - z^n + 1 = 0$, exprese las raíces en la forma $\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta$.

[12]

(b) (i) Exprese $(z - (\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta))(z - (\cos(-\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,(-\theta)))$ como una expresión cuadrática de z, de su respuesta en términos de z y θ.

(ii) A partir de lo anterior, muestre que
$u^4 - u^2 + 1 = \left(u^2 - 2u\cos\frac{\pi}{6} + 1\right)\left(u^2 - 2u\cos\frac{5\pi}{6} + 1\right)$.

(iii) Exprese $z^6 - z^3 + 1$ como el producto de tres expresiones cuadráticas de z.

(iv) Suponiendo que n es par, sugiera una expresión para $z^{2n} - z^n + 1 = 0$ como el producto de n expresiones cuadráticas de z.

[9]

(c) Utilizando (b)(ii), verifique que $\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{3}{4}$.

[3]

(d) Halle $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}$.

[4]

Solución de Práctica de Prueba 1 de AE NS Set 1

Sección A

1. (a) La media

$= \frac{300}{15}$ (M1) por enfoque válido

$= 20$ A1

[2]

(b) (i) -40 A1

(ii) La varianza nueva

$= (-2)^2(9)$ (M1) por enfoque válido

$= 36$ A1

(iii) 6 A1

[4]

2. (a) La pendiente de L_1

$= \frac{32-0}{24-8}$ (M1) por enfoque válido

$= 2$

La ecuación de L_1:

$y - 0 = 2(x-8)$ A1

$y = 2x - 16$

$2x - y - 16 = 0$ A1

[3]

(b) $2 \times -\frac{1}{-a} = -1$ (M1) por enfoque válido

$2 = -a$

$a = -2$ A1

[2]

3. (a) Lado izquierdo

$= (2n+1)^2 + (2n+3)^2 + (2n+5)^2$

$= 4n^2 + 4n + 1 + 4n^2 + 12n + 9 + 4n^2 + 20n + 25$ M1A1

$= 12n^2 + 36n + 35$

$= 12n^2 + 36n + 33 + 2$ M1

$= 3(4n^2 + 12n + 11) + 2$

$=$Lado derecho AG

[3]

(b) $2n+1$, $2n+3$ y $2n+5$ son tres números impares consecutivos. R1

$(2n+1)^2 + (2n+3)^2 + (2n+5)^2$

$= 3(4n^2 + 12n + 11) + 2$ A1

Además $3(4n^2 + 12n + 11)$ es múltiplo de 3. R1

Por tanto, la suma de los cuadrados de tres números impares consecutivos es mayor que un múltiplo de 3 en 2 unidades. AG

[3]

4. $f(x) = px^3 + qx^2 - 2x + 1$

$f'(x) = p(3x^2) + q(2x) - 2(1) + 0$ (A1) por derivadas correctas

$f'(x) = 3px^2 + 2qx - 2$

$f'(1) = -1 \div -\frac{1}{15}$

$\therefore 3p(1)^2 + 2q(1) - 2 = 15$ (M1) por ecuación

$3p + 2q = 17$

$2q = 17 - 3p$ A1

$f^{-1}(41) = 2$

$\therefore f(2) = 41$ (M1) por enfoque válido

$p(2)^3 + q(2)^2 - 2(2) + 1 = 41$ A1

$8p + 4q - 3 = 41$

$\therefore 8p + 2(17 - 3p) - 3 = 41$ (M1) por sustitución

$8p + 34 - 6p - 3 = 41$

$2p = 10$

$p = 5$ A1

$\therefore q = \frac{17 - 3(5)}{2}$

$q = 1$ A1

[8]

5. (a) $a = \dfrac{37-(-5)}{2}$ M1

$a = 21$ A1

$b = \dfrac{2\pi}{2(11-2)}$ M1

$b = \dfrac{\pi}{9}$ A1

$d = \dfrac{37+(-5)}{2}$ M1

$d = 16$

$\therefore f(t) = 21 \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{9}(t+2{,}5)+16$ AG

[5]

(b) Las coordenadas de P'

$= (3(2)+17, 37+8)$ A1

$= (23, 45)$ A1

[2]

6. (a) $g(x)$

$= 3f(x-1)$

$= 3(4(x-1)^4 + 3(x-1)^2 - 1)$ (A1) por sustitución

$= 3(4(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) + 3(x^2 - 2x + 1) - 1)$ M1A1

$= 3(4x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 16x + 4 + 3x^2 - 6x + 3 - 1)$ M1

$= 3(4x^4 - 16x^3 + 27x^2 - 22x + 6)$

$= 12x^4 - 48x^3 + 81x^2 - 66x + 18$ A1

[5]

(b) La suma de las raíces

$= -\dfrac{-48}{12}$ M1

$= 4$ A1

[2]

7. $1+f(|x|)\le |x|$

$1+\dfrac{2|x|^3-5|x|^2-37}{|x|+37}\le |x|$ M1

$\dfrac{2|x|^3-5|x|^2-37}{|x|+37}\le |x|-1$

$2|x|^3-5|x|^2-37\le (|x|-1)(|x|+37)$

$2|x|^3-5|x|^2-37\le |x|^2+36|x|-37$

$2|x|^3-6|x|^2-36|x|\le 0$ (A1) por inecuación correcta

$2|x|\left(|x|^2-3|x|-18\right)\le 0$

$|x|^2-3|x|-18\le 0$ M1

$(|x|+3)(|x|-6)\le 0$

$\therefore 0\le |x|\le 6$ A1

$\therefore 1<x\le 6$ A1

[5]

8. Cuando $n = 2$,

Lado izquierdo $= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lado izquierdo $= 1$

Lado derecho $= \dfrac{2(2+1)(2-1)}{6}$

Lado derecho $= 1$

Por tanto, el enunciado es verdadero cuando $n = 2$. R1

Suponemos que es verdadero cuando $n = k$. M1

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{k(k+1)(k-1)}{6}$$

Cuando $n = k+1$,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k+1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{k(k+1)(k-1)}{6} + \begin{pmatrix} k+1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ M1A1

$$= \frac{k(k+1)(k-1)}{6} + \frac{(k+1)(k)}{2}$$ A1

$$= \frac{k(k+1)(k-1)}{6} + \frac{3k(k+1)}{6}$$

$$= \frac{k(k+1)}{6}(k-1+3)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)((k+1)+1)((k+1)-1)}{6}$$ A1

Por tanto, el enunciado es verdadero cuando $n = k+1$.

A partir de lo anterior, el enunciado es verdadero para $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$. R1

[7]

9. (a) 1 A1

[1]

(b) $\int_1^a \frac{1}{e^2-1} e^{3-x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ A1

$\left[-\frac{1}{e^2-1} e^{3-x}\right]_1^a = \frac{1}{2}$ A1

$-\frac{1}{e^2-1} e^{3-a} - \left(-\frac{1}{e^2-1} e^2\right) = \frac{1}{2}$

$\frac{-e^{3-a} + e^2}{e^2-1} = \frac{1}{2}$ M1

$-e^{3-a} + e^2 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2}$

$e^{3-a} = \frac{e^2+1}{2}$ A1

$3 - a = \ln\left(\frac{e^2+1}{2}\right)$

$a = 3 - \ln\left(\frac{e^2+1}{2}\right)$

Por tanto, la mediana es $3 - \ln\left(\frac{e^2+1}{2}\right)$. AG

[4]

Sección B

10. (a) (i) $\{y : 0 \leq y \leq 1, y \in \mathbb{R}\}$ A2

(ii) $f(x) = 1$

$\therefore \cos^4 x = 1$

$\cos^2 x = -1$ (*Rechazada*) o $\cos^2 x = 1$ (M1) por enfoque válido

$\cos x = -1$ o $\cos x = 1$

$x = \pi$ o $x = 0$, $x = 2\pi$ (A1) por valores correctos

Por lo tanto, hay 3 soluciones. A1

[5]

(b) $f'(x) = (4\cos^3 x)(-\operatorname{sen} x)$ (A1) por regla de la cadena

$f'(x) = -4\operatorname{sen} x \cos^3 x$ A1

[2]

(c) El área total de las regiones

$= \int_0^{\pi} (\cos^4 x)(2\operatorname{sen} x)\mathrm{d}x$ (A1) por integral definida

Sea $u = \cos x$
$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\operatorname{sen} x \Rightarrow (-1)\mathrm{d}u = \operatorname{sen} x\mathrm{d}x$
$x = \pi \Rightarrow u = \cos\pi = -1$
$x = 0 \Rightarrow u = \cos 0 = 1$

(A1) por sustitución

$= \int_1^{-1} -2u^4 \mathrm{d}u$ M1A1

$= \left[-\frac{2}{5}u^5\right]_1^{-1}$ A1

$= -\frac{2}{5}(-1)^5 - \left(-\frac{2}{5}(1)^5\right)$ (M1) por sustitución

$= \frac{4}{5}$ A1

[7]

11. (a) $\dfrac{dy}{dx}=h(x)\cdot(y+1)$

$\dfrac{1}{y+1}dy=\text{sen }x dx$ (M1) por enfoque válido

$\displaystyle\int\frac{1}{y+1}dy=\int\text{sen }x dx$ (A1) por enfoque correcto

$\ln|y+1|=-\cos x+C$ A1

$y+1=e^{-\cos x+C}$ (M1) por enfoque válido

$y=e^{-\cos x+C}-1$ A1

$0=e^{-\cos 0+C}-1$ (M1) por sustitución

$1=e^{-1+C}$

$-1+C=0$

$C=1$ (A1) por valor correcto

$\therefore y=e^{1-\cos x}-1$ A1

[8]

(b) $\dfrac{dy}{dx}=h(x)\sqrt{1-(h(x))^2}\cdot(y+1)$

$\dfrac{dy}{dx}=\text{sen }x\sqrt{1-\text{sen}^2 x}\cdot(y+1)$

$\dfrac{dy}{dx}=\text{sen }x\cos x\cdot(y+1)$ A1

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\text{sen }2x\cdot(y+1)}{2}$

$\dfrac{dy}{dx}-\left(\dfrac{1}{2}\text{sen }2x\right)y=\dfrac{1}{2}\text{sen }2x$ A1

El factor de integración

$=e^{\int-\frac{1}{2}\text{sen }2x dx}$ M1

$=e^{\frac{1}{4}\cos 2x}$ A1

$\therefore e^{\frac{1}{4}\cos 2x}\dfrac{dy}{dx}-e^{\frac{1}{4}\cos 2x}\left(\dfrac{1}{2}\text{sen }2x\right)y$

$=e^{\frac{1}{4}\cos 2x}\left(\dfrac{1}{2}\text{sen }2x\right)$ M1

$\therefore e^{\frac{1}{4}\cos 2x}\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{2}ye^{\frac{1}{4}\cos 2x}\text{sen }2x=\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{4}\cos 2x}\text{sen }2x$

$\dfrac{d}{dx}\left(ye^{\frac{1}{4}\cos 2x}\right)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{4}\cos 2x}\text{sen }2x$ A1

$ye^{\frac{1}{4}\cos 2x}=\displaystyle\int\frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}\cos 2x}\text{sen }2x dx$

Sea $u = \frac{1}{4}\cos 2x$. M1

$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{4}(-\operatorname{sen} 2x)(2) \Rightarrow (-1)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\mathrm{d}x$

$\therefore ye^{\frac{1}{4}\cos 2x} = \int -e^{u}\mathrm{d}u$ A1

$ye^{\frac{1}{4}\cos 2x} = -e^{u} + C$

$ye^{\frac{1}{4}\cos 2x} = -e^{\frac{1}{4}\cos 2x} + C$

$y = Ce^{-\frac{1}{4}\cos 2x} - 1$ A1

$0 = Ce^{-\frac{1}{4}\cos 2(0)} - 1$ M1

$1 = Ce^{-\frac{1}{4}}$

$C = e^{\frac{1}{4}}$ A1

$\therefore y = e^{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2x} - 1$

$y = e^{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(1-2\operatorname{sen}^{2}x)} - 1$ A1

$y = e^{\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{2}x} - 1$ AG

[12]

12. (a) $z^6 + 1 = 0$

$z^6 = -1$

$z^6 = \cos\pi + \mathrm{i}\operatorname{sen}\pi$ A1

$z = \cos\left(\dfrac{\pi + 2k\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi + 2k\pi}{6}\right)$ M1

($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$)

$z = \cos\dfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}$, $z = \cos\dfrac{\pi}{2} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}$,

$z = \cos\dfrac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{6}$, $z = \cos\dfrac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{6}$,

$z = \cos\dfrac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2}$ o $z = \cos\dfrac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{6}$ A2

[4]

(b) $z^6 + 1$

$= z^6 - z^4 + z^2 + z^4 - z^2 + 1$ M1

$= z^2(z^4 - z^2 + 1) + (z^4 - z^2 + 1)$

$= (z^2 + 1)(z^4 - z^2 + 1)$ A1

$z^4 - z^2 + 1 = 0$

$\dfrac{z^6 + 1}{z^2 + 1} = 0$, donde $z^2 \neq -1$ M1

$z = \cos\dfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}$,

$z = \cos\dfrac{\pi}{2} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}$ (*Rechazada*),

$z = \cos\dfrac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{6}$, $z = \cos\dfrac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{6}$,

$z = \cos\dfrac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2}$ (*Rechazada*) o

$z = \cos\dfrac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{6}$ A1

[4]

(c) (i) $(z - p)(z - q) = 0$ M1

$z^2 - (p + q)z + pq = 0$

$p + q = \lambda^3 + \lambda + \lambda^{11} + \lambda^9$

$p + q = \lambda^3 + \lambda + \lambda^5(-1) + \lambda^3(-1)$ M1

$p + q = \lambda^3 + \lambda - \lambda^5 - \lambda^3$

$p + q = \lambda - \lambda^5$

$p+q=\lambda-\frac{-1}{\lambda}$ M1

$p+q=\lambda+\frac{1}{\lambda}$

$\therefore p+q=\sqrt{3}$ A1

$pq=(\lambda^3+\lambda)(\lambda^{11}+\lambda^9)$

$pq=\lambda^{14}+\lambda^{12}+\lambda^{12}+\lambda^{10}$ M1

$pq=\lambda^2(1)+1+1+\lambda^4(-1)$ M1

$pq=\lambda^2-\lambda^4+2$

$pq=\lambda^2-(\lambda^2-1)+2$

$pq=3$ A1

$\therefore z^2-\sqrt{3}z+3=0$ A1

(ii) $(z-(2p))(z-(2q))=0$ M1

$z^2-(2p+2q)z+(2p)(2q)=0$

$z^2-2(p+q)z+4pq=0$ A1

$z^2-2\sqrt{3}z+4(3)=0$ M1

$z^2-2\sqrt{3}z+12=0$ A1

[12]