

# Solución de Práctica de Prueba 1 de AE NS Set 1

## Sección A

1. (a) La media  
$$= \frac{300}{15}$$
$$= 20$$
(M1) por enfoque válido  
A1 [2]
- (b) (i)  $-40$   
A1
- (ii) La varianza nueva  
$$= (-2)^2(9)$$
$$= 36$$
(M1) por enfoque válido  
A1
- (iii)  $6$   
A1 [4]
2. (a) La pendiente de  $L_1$   
$$= \frac{32-0}{24-8}$$
$$= 2$$
(M1) por enfoque válido  
La ecuación de  $L_1$ :  
$$y - 0 = 2(x - 8)$$
$$y = 2x - 16$$
$$2x - y - 16 = 0$$
A1  
A1 [3]
- (b)  $2 \times -\frac{1}{-a} = -1$   
$$2 = -a$$
$$a = -2$$
(M1) por enfoque válido  
A1 [2]

3. (a) Lado izquierdo  
 $= (2n+1)^2 + (2n+3)^2 + (2n+5)^2$   
 $= 4n^2 + 4n + 1 + 4n^2 + 12n + 9 + 4n^2 + 20n + 25$  M1A1  
 $= 12n^2 + 36n + 35$   
 $= 12n^2 + 36n + 33 + 2$  M1  
 $= 3(4n^2 + 12n + 11) + 2$   
 $= \text{Lado derecho}$  AG
- (b)  $2n+1$ ,  $2n+3$  y  $2n+5$  son tres números impares consecutivos. R1  
 $(2n+1)^2 + (2n+3)^2 + (2n+5)^2$  A1  
 $= 3(4n^2 + 12n + 11) + 2$   
Además  $3(4n^2 + 12n + 11)$  es múltiplo de 3. R1  
Por tanto, la suma de los cuadrados de tres números impares consecutivos es mayor que un múltiplo de 3 en 2 unidades. AG
4.  $f(x) = px^3 + qx^2 - 2x + 1$   
 $f'(x) = p(3x^2) + q(2x) - 2(1) + 0$  (A1) por derivadas correctas  
 $f'(x) = 3px^2 + 2qx - 2$   
 $f'(1) = -1 \div -\frac{1}{15}$   
 $\therefore 3p(1)^2 + 2q(1) - 2 = 15$  (M1) por ecuación  
 $3p + 2q = 17$   
 $2q = 17 - 3p$  A1  
 $f^{-1}(41) = 2$   
 $\therefore f(2) = 41$  (M1) por enfoque válido  
 $p(2)^3 + q(2)^2 - 2(2) + 1 = 41$  A1  
 $8p + 4q - 3 = 41$   
 $\therefore 8p + 2(17 - 3p) - 3 = 41$  (M1) por sustitución  
 $8p + 34 - 6p - 3 = 41$   
 $2p = 10$   
 $p = 5$  A1  
 $\therefore q = \frac{17 - 3(5)}{2}$   
 $q = 1$  A1

[3]

[3]

[8]

5.	(a)	$a = \frac{37 - (-5)}{2}$	M1	
		$a = 21$	A1	
		$b = \frac{2\pi}{2(11-2)}$	M1	
		$b = \frac{\pi}{9}$	A1	
		$d = \frac{37 + (-5)}{2}$	M1	
		$d = 16$		
		$\therefore f(t) = 21 \operatorname{sen} \frac{\pi}{9}(t + 2,5) + 16$	AG	
				[5]
	(b)	Las coordenadas de P'		
		$= (3(2) + 17, 37 + 8)$	A1	
		$= (23, 45)$	A1	
				[2]
6.	(a)	$g(x)$		
		$= 3f(x-1)$		
		$= 3(4(x-1)^4 + 3(x-1)^2 - 1)$	(A1) por sustitución	
		$= 3(4(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) + 3(x^2 - 2x + 1) - 1)$	M1A1	
		$= 3(4x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 16x + 4 + 3x^2 - 6x + 3 - 1)$	M1	
		$= 3(4x^4 - 16x^3 + 27x^2 - 22x + 6)$		
		$= 12x^4 - 48x^3 + 81x^2 - 66x + 18$	A1	
				[5]
	(b)	La suma de las raíces		
		$= -\frac{-48}{12}$	M1	
		$= 4$	A1	
				[2]

7.  $1 + f(|x|) \leq |x|$

$$1 + \frac{2|x|^3 - 5|x|^2 - 37}{|x| + 37} \leq |x| \quad \text{M1}$$

$$\frac{2|x|^3 - 5|x|^2 - 37}{|x| + 37} \leq |x| - 1$$

$$2|x|^3 - 5|x|^2 - 37 \leq (|x| - 1)(|x| + 37)$$

$$2|x|^3 - 5|x|^2 - 37 \leq |x|^2 + 36|x| - 37$$

$$2|x|^3 - 6|x|^2 - 36|x| \leq 0 \quad \text{(A1) por inecuación correcta}$$

$$2|x|(|x|^2 - 3|x| - 18) \leq 0$$

$$|x|^2 - 3|x| - 18 \leq 0 \quad \text{M1}$$

$$(|x| + 3)(|x| - 6) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq |x| \leq 6 \quad \text{A1}$$

$$\therefore 1 < x \leq 6 \quad \text{A1}$$

[5]

8. Cuando  $n = 2$ ,

$$\text{Lado izquierdo} = \binom{2}{2}$$

$$\text{Lado izquierdo} = 1$$

$$\text{Lado derecho} = \frac{2(2+1)(2-1)}{6}$$

$$\text{Lado derecho} = 1$$

Por tanto, el enunciado es verdadero cuando  $n = 2$ . R1

Suponemos que es verdadero cuando  $n = k$ . M1

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{k}{2} = \frac{k(k+1)(k-1)}{6}$$

Cuando  $n = k + 1$ ,

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{k}{2} + \binom{k+1}{2}$$

$$= \frac{k(k+1)(k-1)}{6} + \binom{k+1}{2} \quad \text{M1A1}$$

$$= \frac{k(k+1)(k-1)}{6} + \frac{(k+1)(k)}{2} \quad \text{A1}$$

$$= \frac{k(k+1)(k-1)}{6} + \frac{3k(k+1)}{6}$$

$$= \frac{k(k+1)}{6}(k-1+3)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)((k+1)+1)((k+1)-1)}{6} \quad \text{A1}$$

Por tanto, el enunciado es verdadero cuando

$$n = k + 1.$$

A partir de lo anterior, el enunciado es verdadero para

$$n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 2. \quad \text{R1}$$

[7]

9. (a) 1 A1

[1]

(b)  $\int_1^a \frac{1}{e^2-1} e^{3-x} dx = \frac{1}{2}$  A1

$$\left[ -\frac{1}{e^2-1} e^{3-x} \right]_1^a = \frac{1}{2} \quad \text{A1}$$

$$-\frac{1}{e^2-1} e^{3-a} - \left( -\frac{1}{e^2-1} e^2 \right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{-e^{3-a} + e^2}{e^2-1} = \frac{1}{2} \quad \text{M1}$$

$$-e^{3-a} + e^2 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2}$$

$$e^{3-a} = \frac{e^2+1}{2} \quad \text{A1}$$

$$3-a = \ln\left(\frac{e^2+1}{2}\right)$$

$$a = 3 - \ln\left(\frac{e^2+1}{2}\right)$$

Por tanto, la mediana es  $3 - \ln\left(\frac{e^2+1}{2}\right)$ . AG

[4]

## Sección B

10. (a) (i)  $\{y : 0 \leq y \leq 1, y \in \mathbb{R}\}$  A2
- (ii)  $f(x) = 1$   
 $\therefore \cos^4 x = 1$   
 $\cos^2 x = -1$  (*Rechazada*) o  $\cos^2 x = 1$  (M1) por enfoque válido  
 $\cos x = -1$  o  $\cos x = 1$  (A1) por valores correctos  
 $x = \pi$  o  $x = 0, x = 2\pi$  A1  
 Por lo tanto, hay 3 soluciones. [5]
- (b)  $f'(x) = (4 \cos^3 x)(-\sin x)$  (A1) por regla de la cadena  
 $f'(x) = -4 \sin x \cos^3 x$  A1 [2]
- (c) El área total de las regiones  
 $= \int_0^\pi (\cos^4 x)(2 \sin x) dx$  (A1) por integral definida
- Sea  $u = \cos x$   
 $\frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow (-1)du = \sin x dx$   
 $x = \pi \Rightarrow u = \cos \pi = -1$   
 $x = 0 \Rightarrow u = \cos 0 = 1$
- $= \int_1^{-1} -2u^4 du$  M1A1
- $= \left[ -\frac{2}{5}u^5 \right]_1^{-1}$  A1
- $= -\frac{2}{5}(-1)^5 - \left( -\frac{2}{5}(1)^5 \right)$  (M1) por sustitución
- $= \frac{4}{5}$  A1 [7]

11. (a)  $\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot (y+1)$

$$\frac{1}{y+1} dy = \text{sen } x dx \quad \text{(M1) por enfoque válido}$$

$$\int \frac{1}{y+1} dy = \int \text{sen } x dx \quad \text{(A1) por enfoque correcto}$$

$$\ln|y+1| = -\cos x + C \quad \text{A1}$$

$$y+1 = e^{-\cos x + C} \quad \text{(M1) por enfoque válido}$$

$$y = e^{-\cos x + C} - 1 \quad \text{A1}$$

$$0 = e^{-\cos 0 + C} - 1 \quad \text{(M1) por sustitución}$$

$$1 = e^{-1+C}$$

$$-1 + C = 0$$

$$C = 1 \quad \text{(A1) por valor correcto}$$

$$\therefore y = e^{1-\cos x} - 1 \quad \text{A1}$$

[8]

(b)  $\frac{dy}{dx} = h(x) \sqrt{1 - (h(x))^2} \cdot (y+1)$

$$\frac{dy}{dx} = \text{sen } x \sqrt{1 - \text{sen}^2 x} \cdot (y+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \text{sen } x \cos x \cdot (y+1) \quad \text{A1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{sen } 2x \cdot (y+1)}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} - \left( \frac{1}{2} \text{sen } 2x \right) y = \frac{1}{2} \text{sen } 2x \quad \text{A1}$$

El factor de integración

$$= e^{\int -\frac{1}{2} \text{sen } 2x dx} \quad \text{M1}$$

$$= e^{\frac{1}{4} \cos 2x} \quad \text{A1}$$

$$\therefore e^{\frac{1}{4} \cos 2x} \frac{dy}{dx} - e^{\frac{1}{4} \cos 2x} \left( \frac{1}{2} \text{sen } 2x \right) y \quad \text{M1}$$

$$= e^{\frac{1}{4} \cos 2x} \left( \frac{1}{2} \text{sen } 2x \right)$$

$$\therefore e^{\frac{1}{4} \cos 2x} \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2} y e^{\frac{1}{4} \cos 2x} \text{sen } 2x = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{4} \cos 2x} \text{sen } 2x$$

$$\frac{d}{dx} \left( y e^{\frac{1}{4} \cos 2x} \right) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{4} \cos 2x} \text{sen } 2x \quad \text{A1}$$

$$y e^{\frac{1}{4} \cos 2x} = \int \frac{1}{2} e^{\frac{1}{4} \cos 2x} \text{sen } 2x dx$$

$$\text{Sea } u = \frac{1}{4} \cos 2x. \quad \text{M1}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{4}(-\text{sen } 2x)(2) \Rightarrow (-1)du = \frac{1}{2} \text{sen } 2x dx$$

$$\therefore ye^{\frac{1}{4} \cos 2x} = \int -e^u du \quad \text{A1}$$

$$ye^{\frac{1}{4} \cos 2x} = -e^u + C$$

$$ye^{\frac{1}{4} \cos 2x} = -e^{\frac{1}{4} \cos 2x} + C$$

$$y = Ce^{-\frac{1}{4} \cos 2x} - 1 \quad \text{A1}$$

$$0 = Ce^{-\frac{1}{4} \cos 2(0)} - 1 \quad \text{M1}$$

$$1 = Ce^{-\frac{1}{4}}$$

$$C = e^{\frac{1}{4}} \quad \text{A1}$$

$$\therefore y = e^{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2x} - 1$$

$$y = e^{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}(1-2\text{sen}^2 x)} - 1 \quad \text{A1}$$

$$y = e^{\frac{1}{2} \text{sen}^2 x} - 1 \quad \text{AG}$$

[12]

12. (a)  $z^6 + 1 = 0$   
 $z^6 = -1$   
 $z^6 = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi$  A1  
 $z = \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)$  M1  
( $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ )  
 $z = \cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}, z = \cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2},$   
 $z = \cos\frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}, z = \cos\frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6},$   
 $z = \cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$  o  $z = \cos\frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}$  A2

[4]

(b)  $z^6 + 1$   
 $= z^6 - z^4 + z^2 + z^4 - z^2 + 1$  M1  
 $= z^2(z^4 - z^2 + 1) + (z^4 - z^2 + 1)$   
 $= (z^2 + 1)(z^4 - z^2 + 1)$  A1  
 $z^4 - z^2 + 1 = 0$   
 $\frac{z^6 + 1}{z^2 + 1} = 0$ , donde  $z^2 \neq -1$  M1  
 $z = \cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6},$   
 $z = \cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$  (Rechazada),  
 $z = \cos\frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}, z = \cos\frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6},$   
 $z = \cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$  (Rechazada) o  
 $z = \cos\frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}$  A1

[4]

(c) (i)  $(z - p)(z - q) = 0$  M1  
 $z^2 - (p + q)z + pq = 0$   
 $p + q = \lambda^3 + \lambda + \lambda^{11} + \lambda^9$   
 $p + q = \lambda^3 + \lambda + \lambda^5(-1) + \lambda^3(-1)$  M1  
 $p + q = \lambda^3 + \lambda - \lambda^5 - \lambda^3$   
 $p + q = \lambda - \lambda^5$

$$p+q = \lambda - \frac{-1}{\lambda} \quad \text{M1}$$

$$p+q = \lambda + \frac{1}{\lambda}$$

$$\therefore p+q = \sqrt{3} \quad \text{A1}$$

$$pq = (\lambda^3 + \lambda)(\lambda^{11} + \lambda^9)$$

$$pq = \lambda^{14} + \lambda^{12} + \lambda^{12} + \lambda^{10} \quad \text{M1}$$

$$pq = \lambda^2(1) + 1 + 1 + \lambda^4(-1) \quad \text{M1}$$

$$pq = \lambda^2 - \lambda^4 + 2$$

$$pq = \lambda^2 - (\lambda^2 - 1) + 2$$

$$pq = 3 \quad \text{A1}$$

$$\therefore z^2 - \sqrt{3}z + 3 = 0 \quad \text{A1}$$

$$\text{(ii)} \quad (z - (2p))(z - (2q)) = 0 \quad \text{M1}$$

$$z^2 - (2p + 2q)z + (2p)(2q) = 0$$

$$z^2 - 2(p + q)z + 4pq = 0 \quad \text{A1}$$

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 4(3) = 0 \quad \text{M1}$$

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 12 = 0 \quad \text{A1}$$

[12]