Aplicaciones e Interpretación Nivel Superior para las Matemáticas del PD del IB Prueba de Práctica Set 1 – Prueba 1 (120 Minutos)

Libro de Preguntas – Respuestas

Instrucciones

1. Conteste **TODAS** las preguntas. Escriba sus respuestas en los espacios provistos por este Libro de Preguntas - Respuestas.

2. Es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.

3. Se le sugiere preparar un folleto de fórmulas de Aplicaciones e Interpretación para las Matemáticas del PD del IB cuando intente responder las preguntas.

4. Se entregarán las hojas de respuestas y papeles gráficos adicionales a pedido.

5. Salvo que se indique lo contrario, **TODO** el trabajo debe mostrarse claramente.

6. Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, las respuestas numéricas deberán ser **EXACTAS** o aproximadas con **TRES CIFRAS SIGNIFICATIVAS**.

7. Los diagramas de este documento **NO** están necesariamente dibujados a escala.

8. Información que debe leerse antes de comenzar el examen:

	Solo para uso del Marcador	Solo para uso del Examinador	
Número de Pregunta	**Puntos**	**Puntos**	**Puntuación Máxima**
1			5
2			5
3			6
4			5
5			6
6			6
7			7
8			6
9			6
10			5
11			8
12			7
13			6
14			7
15			7
16			5
17			7
18			6
Total			
Prueba 1 Total			**110**

1. En un partido de fútbol, ocho jugadores lanzan penaltis uno a uno. La siguiente tabla muestra la velocidad del balón en cada penalti:

Jugador	Velocidad del balón	Jugador	Velocidad del balón
Abraham	$80\ \text{kmh}^{-1}$	Essien	$40\ \text{kmh}^{-1}$
Berg	$76\ \text{kmh}^{-1}$	Flores	$116\ \text{kmh}^{-1}$
Clyne	$100\ \text{kmh}^{-1}$	Gana	$90\ \text{kmh}^{-1}$
Denayer	$66\ \text{kmh}^{-1}$	Harry	$76\ \text{kmh}^{-1}$

(a) Halle la velocidad media de la pelota.

[2]

(b) Escriba

(i) la velocidad media;

(ii) la desviación típica de las velocidades;

(iii) el rango de velocidades.

[3]

2. Se quiere averiguar el número de asientos en un teatro. El número de asientos en la primera fila del teatro u_1 es 100. El número de asientos en cada fila siguiente forma una progresión aritmética. El número de asientos en la décima fila u_{10} es 181.

(a) Halle el valor de d, la diferencia común.

[2]

(b) A partir de lo anterior, escriba el número de asientos en la decimotercera fila.

[1]

Hay 15 filas en el teatro.

(c) Halle el número **total** de asientos en el teatro.

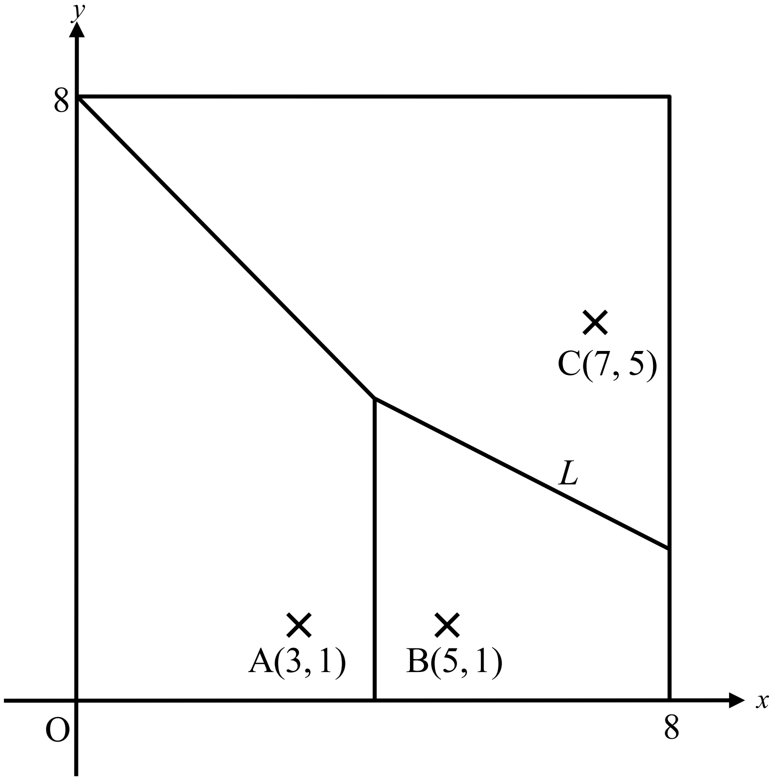
[2]

3. Se construye un parque triangular ABC de manera que $\mathrm{AB} = 28\ \mathrm{m}$, $\mathrm{AC} = 32\ \mathrm{m}$ y $\mathrm{BC} = 41\ \mathrm{m}$.

(a) Halle $\mathrm{A\hat{B}C}$. [3]

(b) A partir de lo anterior, halle el área del parque. [3]

4. El siguiente diagrama muestra el diagrama de Voronoi de tres restaurantes de comida para llevar, A, B y C, en una ciudad delimitada por los ejes coordenados, las líneas $x = 8$ y $y = 8$, donde 1 unidad representa $1\,\mathrm{km}$.



La recta L es el límite que separa las celdas B y C del diagrama de Voronoi. Se sabe que $(4, 4)$ es un punto de L.

(a) (i) Halle el gradiente de L.

(ii) A partir de lo anterior, halle la ecuación de L en la forma pendiente-intersección.

[4]

Kimberly le gustaría encontrar un restaurante más cercano a su oficina para minimizar el tiempo de entrega de su comida durante la hora del almuerzo. La posición de su oficina es en $(7; 2,5)$.

(b) Indique la razón por la que para ella es indiferente elegir el restaurante B o el restaurante C.

[1]

5. Un dado de ocho caras numeradas $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ y 8 se lanza trece veces.

(a) Halle el valor esperado de obtener múltiplos de 3 en los lanzamientos. [2]

(b) Halle la varianza de obtener múltiplos de 3 en los lanzamientos. [2]

(c) Halle la probabilidad de que se obtengan múltiplos de 3 en 8 lanzamientos. [2]

6. Una caja rectangular cerrada tiene $4x$ cm de largo, $2x$ cm de ancho, y cm de alto, donde x, $y > 0$. Se sabe que la suma del largo y la altura de la caja rectangular es 20 cm.

(a) Escriba

(i) una expresión para y en términos de x;

(ii) el posible rango de valores que puede tomar x.

[2]

(b) Exprese V en términos de x, donde V cm^3 es el volumen de la caja rectangular.

[2]

(c) Use la calculadora de pantalla gráfica para hallar el volumen máximo.

[2]

7. Mitsuhide va a comprar un barco. Se le sugiere un plan para pagar un préstamo de $950000\$$:

Se debe realizar un total de 120 pagos mensuales, con un interés nominal anual del $3,3\%$, compuesto mensualmente.

(a) Halle el monto del pago mensual. [3]

(b) Halle la cantidad total a pagar. [2]

(c) A partir de lo anterior, halle la cantidad de intereses pagados. [2]

8. El gráfico de una función cuadrática corta al eje y en 150. Una de las intersecciones con el eje x es -5. La coordenada x del vértice de la gráfica es 5. La ecuación de la función cuadrática se puede escribir de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

(a) Escriba el valor de c.

[1]

(b) Escriba la segunda intersección con el eje x de la función.

[1]

(c) Halle el valor de a y de b.

[4]

9. En un supermercado, los pesos de las manzanas están normalmente distribuidos con una media de 140 g y desviación típica de 9 g, y los pesos de las naranjas se distribuyen normalmente con media de 200 g y desviación típica de 14 g. Se eligen tres manzanas al azar. Sea X el peso total de las manzanas seleccionadas.

(a) Escriba

(i) la media de X;

(ii) la varianza de X.

[2]

Se eligen al azar tres manzanas y siete naranjas. Sea Y el peso total de las frutas seleccionadas.

(b) Escriba

(i) la media de Y;

(ii) la desviación típica de Y.

[2]

(c) A partir de lo anterior, halle $\mathrm{P}(Y \geq 1770)$.

[2]

10. El peso de una matrícula de área $A\,\mathrm{cm}^2$ es $W\,\mathrm{g}$. Se sabe que W es directamente proporcional a $\sqrt[3]{A}$. Cuando $A = 512$, $W = 96$.

(a) Exprese W en términos de A.

[2]

(b) Escriba el área de una matrícula con peso de 60 gramos.

[1]

La gráfica de W se transforma en una nueva gráfica $W = 7 + 24\sqrt[3]{A}$ por medio de dos transformaciones.

(c) Describa geométricamente las dos transformaciones.

[2]

11. El número de antorchas vendidas en una tienda cada semana sigue una distribución de Poisson con media λ, donde $\lambda > 20$, $\lambda \in \mathbb{Z}$. La probabilidad de que se vendan 25 antorchas en una semana en particular es $0{,}0555460$.

(a) Halle λ.

[2]

(b) A partir de lo anterior, halle la probabilidad de que

(i) se vendan al menos 19 antorchas en una semana en particular.

(ii) se venda exactamente 1 antorcha en un día en particular.

(iii) se venda exactamente 1 antorcha en cada uno de los cuatro días consecutivos.

[6]

12. El desplazamiento, en centímetros, de una partícula desde el origen, O, en el tiempo t segundos, está dado por $s(t) = 8e^t \operatorname{sen} 3t$, $0 \le t \le \pi$.

(a) Halle la distancia máxima de la partícula desde O.

[2]

(b) (i) Halle el tiempo en el que la partícula vuelve a O.

(ii) Halle $s'(t)$.

(iii) A partir de lo anterior, escriba la aceleración de la partícula en el instante que vuelve a O.

[5]

13. Se realizan dos encuestas para medir la satisfacción de los residentes con los servicios prestados por el centro comunitario. En las encuestas se utiliza una puntuación de 0 a 10, donde 0 representa insatisfacción absoluta y 10 representa satisfacción absoluta. La siguiente tabla muestra los resultados de las encuestas hechas a seis residentes:

Residente	A	B	C	D	E	F
Puntuaciones de la primera encuesta (x)	5	7	3	6	8	8
Puntuaciones de la segunda encuesta (y)	4	9	5	5	9	9

El gerente del centro comunitario quiere investigar si las puntuaciones medias de la segunda encuesta han mejorado. A la vez, se lleva a cabo una prueba t con un nivel de significación del 5%. Se define $d = x - y$.

(a) (i) Escriba la hipótesis nula de la prueba.

(ii) Escriba la hipótesis alternativa de la prueba.

[2]

(b) Halle el valor p.

[2]

(c) Indique la conclusión de la prueba razonando su respuesta.

[2]

14. Sea $f(x) = 9x + 1$, $g(x) = 2\,\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right) - 6$. Sea $h(x) = (g \circ f)(x)$.

(a) Halle una expresión para $h(x)$. [3]

(b) Halle el periodo de h. [2]

(c) Escriba el rango de h. [2]

15. Una función cuadrática está dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Se sabe que las raíces complejas de $f(x) = 0$ son $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{i}$ y $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\mathrm{i}$.

(a) Escriba los valores de

(i) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{i}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\mathrm{i}\right)$;

(ii) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{i}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\mathrm{i}\right)$.

[2]

(b) A partir de lo anterior, halle la expresión de $f(x)$, dando su respuesta en términos de a .

[3]

La gráfica de $f(x)$ atraviesa el punto $\left(1, \frac{5}{2}\right)$.

(c) Halle el valor de a .

[2]

16. El valor $V(t)$ de un reloj de péndulo (en dólares) t años después del 31 de diciembre de 1888 se puede modelar por

$$V(t)=\begin{cases}\dfrac{1000000}{1+29e^{-2,175}}(t+15) & 0\le t<15\\[2ex] \dfrac{30000000}{1+29e^{-0,145t}} & t\ge 15\end{cases}.$$

(a) Halle el valor del reloj de péndulo a finales de 1899.

[2]

(b) Halle t cuando $V(t)=10000000$.

[2]

(c) Interprete el valor del reloj de péndulo después de un largo período de tiempo.

[1]

17. R se define como la región acotada por las líneas $y = e^{0,25x} - 1,25$, $y = 8$, el eje x y el eje y.

(a) (i) Muestre que $x = 4\ln(y + 1,25)$.

(ii) A partir de lo anterior, halle el área de R.

[5]

Un modelo sólido se forma por la rotación de la región R 2π alrededor del eje y.

(b) Halle el volumen del sólido.

[2]

18. Se estudia el ancho de los marcos de fotos, en centímetros, vendidos en un bazar. Se seleccionan aleatoriamente 11 marcos de fotos y se miden los anchos correspondientes. Se sabe que la media de la muestra es de 38 cm y la anchura del intervalo de confianza del 99% para la media de la población es de $13{,}8\text{ cm}$.

(a) Explique por qué el intervalo de confianza del 90% para la media poblacional es un subconjunto del intervalo de confianza del 99% para la media de la población.

[1]

(b) Escriba el intervalo de confianza del 99% para la media de la población.

[1]

Sea σ^2 la varianza conocida de la población.

(c) Halle σ^2.

[4]

FIN DE LA PRUEBA